Mehrdeutige Verwandtschaften zwischen Punktfeldern, insbesondere solche, welche durch Raumkurven veranlasst werden

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen

philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

vorgelegt und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Gerhard Broll

Mittwoch, den 15. November 1911, mittags $11^1/_2$ Uhr

im Musiksaale der Universität

Vortrag

„Geschichte der infinitesimalen Untersuchungen bis auf Leibniz und Newton“

und

Promotion

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1911

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau.

Referent: Professor Dr. **Sturm**.

Datum der mündlichen Prüfung: 29. Juli 1911.

Herrn Geheimrat Sturm

als Zeichen der Hochachtung und Dankbarkeit.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543115_0028

Kapitel I.

Zwei zweieindeutige Verwandtschaften dritten Grades.

1.

Das Punktfeld einer Ebene Σ' sei kollinear auf einen Strahlenbündel bezogen, dessen Scheitel $\mathfrak{S}$ auf einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung F^3 liegt. Da eine solche um jede drei windschiefe Geraden, die auf ihr verlaufen, eine Trilinearität[1]) bewirkt, in der die in einem Punkt der Fläche sich schneidenden Ebenen zugeordnet sind, und da andererseits zwei Trilinearitäten durch projektive Operationen in einander übergeführt werden können, so erzielt man eine eindeutige Abbildung der Fläche in eine Ebene Σ, wenn man in dieser drei Strahlenbüschel beziehentlich zu den erzeugenden Büscheln so projektiv macht, dass sie durch die Trilinearität, deren Ergebnis die Fläche ist, trilinear in perspektiver Lage werden. Einem Punkt $\mathfrak{X}$ der Fläche entspricht in Σ der Konkurrenzpunkt jener Geraden, die den in $\mathfrak{X}$ sich schneidenden Ebenen aus den drei Büscheln zugeordnet sind, und umgekehrt. *Zwischen den beiden Ebenen Σ und Σ' wird eine zweieindeutige Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,1}$ hervorgerufen, wenn man einem Punkte X' von Σ' die Bilder der beiden weiteren Schnitte der F^3 mit dem ihm in der Kollineation korrespondierenden Strahle aus $\mathfrak{S}$ in*

---

[1]) Trilinearität und die Erzeugung der Fläche dritter Ordnung durch trilineare Büschel behandelt: Rudolf Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, I, § 33.

Σ *als entsprechend zuordnet*[1]); einem Punkte X der Ebene Σ entspricht dann der dem Projektionsstrahl aus $\mathfrak{S}$ nach seinem Bild auf der F^3 in der Kollineation zugeordnete Punkt der Ebene Σ'.

Da dieser Verwandtschaft die Abbildung der F^3 in die Ebene Σ zu grunde gelegt ist, so folgt eine kurze Zusammenstellung ihrer Eigenschaften[2]). Die Ebene Σ erhält sechs Hauptpunkte, A, . . F, welche unabhängig von einander angenommen werden können; ihnen entsprechen auf der F^3 sechs gegen einander windschiefe Gerade, a, . . f. Eine Gerade l der Ebene Σ ist das Bild einer auf der Fläche verlaufenden kubischen Raumkurve r^3, welche im allgemeinen keine der sechs Fundamentalgeraden trifft, da ja die Gerade l in der Regel mit keinem der Hauptpunkte inzidiert. Die Kurven dieses Netzes haben die Fundamentaleigenschaften der Geraden einer Ebene: durch zwei Punkte der Fläche geht genau eine von ihnen, und je zwei haben genau einen Punkt gemein.

Einer Geraden l' von Σ' korrespondiert ein Strahlenbüschel aus $\mathfrak{S}$, der die F^3 in einer durch diesen Punkt gehenden ebenen Kurve dritter Ordnung $\mathfrak{C}^3$ schneidet. Ihre drei Begegnungspunkte mit einer beliebigen Netz-r^3, die sich in Σ in eine Gerade abbildet, lehren, dass zwei Geraden l und l' der beiden Ebenen drei Paare entsprechender Punkte besitzen. *Die Verwandtschaft ist dritten Grades;* einer Geraden der einen Ebene entspricht eine Kurve dritter Ordnung in der anderen, C in Σ, C' in Σ'.

Die allgemeine Theorie der zweieindeutigen Verwandtschaften zwischen zweistufigen Gebilden[3]) weist nach, dass die Kurven C ein Netz bilden. Die ebene Kurve $\mathfrak{C}^3$, welche der l' auf der F^3 entspricht, wird von den beiden dem

---

[1]) Diese Verwandtschaft wird bei Sturm, Geom. Verw. IV, § 124 als Beispiel angeführt.

[2]) Eine Ableitung derselben findet man an der bereits erwähnten Stelle und im vierten Bande des genannten Werkes, § 127 S. 272.

[3]) Sturm, Geom. Verw. IV, § 124.

beweglichen Punkte X' dieser Geraden entsprechenden Punkten $\mathfrak{X}$ und $\bar{\mathfrak{X}}$ durchlaufen. Auf demjenigen Strahl des die $\mathfrak{C}^3$ einschneidenden Büschels aus $\mathfrak{G}$, welcher in die Tangentialebene dieses Punktes fällt, d. h. in ihm berührt, ist $\mathfrak{G}$ selbst einer der beiden verbundenen Punkte. Da ausserdem eine jede der sechs Fundamentalgeraden von der $\mathfrak{C}^3$ getroffen wird, so geht sie in Σ in eine Kurve dritter Ordnung über, welche einfach durch die sechs Hauptpunkte A, . . F und durch G, den Bildpunkt von $\mathfrak{G}$, gelegt ist. Ein Doppelpunkt kommt nicht zu stande. Die Kurven C haben also im allgemeinen das Geschlecht 1. *Es handelt sich um das Netz der — im allgemeinen doppelpunktslosen — Kurven dritter Ordnung durch sieben feste einfache Punkte A, . . G.*

Einer Geraden l in Σ entspricht auf der F^3 eine Netz-r^3; ihrem Projektionskegel dritter Ordnung aus $\mathfrak{G}$, der eine Doppelkante besitzt, *korrespondiert in* Σ' *eine Kurve dritter Ordnung C', welche einen Doppelpunkt und damit das wegen der eindeutigen Beziehung zur Geraden l notwendige Geschlecht Null erhält.* Hauptpunkte in der Ebene Σ' ergeben sich nicht. Es zeigt sich zugleich, dass jede Gerade der Ebene Σ ein Paar verbundener Punkte (denen in Σ' derselbe Punkt entspricht) besitzt.

Dem Strahlenbüschel ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{a}$) entspreche in Σ' die Gerade a'. Gleitet der Strahl aus $\mathfrak{G}$ an der $\mathfrak{a}$ entlang, so beschreibt der zweite Treffpunkt mit der F^3 einen Kegelschnitt, welcher die $\mathfrak{a}$ zweimal, die übrigen Fundamentalgeraden je einmal trifft und durch $\mathfrak{G}$ geht. Dieser Kegelschnitt begegnet einer Netz-r^3 dreimal — $\mathfrak{a}$ ist ja gegen eine solche windschief —, er wird daher in Σ in eine Kurve dritter Ordnung a^3 übergeführt, welche doppelt durch A, einfach durch die übrigen Hauptpunkte mit Einschluss des G geht. Analoges gilt von den fünf weiteren Hauptpunkten B, . . F.

Die Tangentialebene von $\mathfrak{G}$ schneidet die F^3 in einer ebenen Kurve dritter Ordnung g^3, welche in $\mathfrak{G}$ einen Doppelpunkt besitzt. Durchläuft der Strahl aus $\mathfrak{G}$ den in dieser Ebene befindlichen Strahlenbüschel — die entsprechende Gerade in Σ' sei g' —, so ist stets $\mathfrak{G}$ einer der beiden ver-

bundenen Punkte. Er ist sich selbst verbunden auf den beiden durch $\mathfrak{G}$ gehenden Haupttangenten der Fläche. Auch die g^3 bildet sich in Σ in eine Kurve dritter Ordnung, g'^3, ab; auf ihr liegt G doppelt, die übrigen Hauptpunkte einfach.

Einem jeden der sieben Hauptpunkte der Ebene Σ *ist also eine Kurve dritter Ordnung verbunden, welche durch ihn selbst doppelt, durch die anderen Hauptpunkte einfach hindurchgeht*; sie wird für die gleich zu besprechende verbundene Verwandtschaft seine Hauptkurve werden. Die entsprechenden Gebilde in Σ' sind sieben Gerade, $a', \ldots g'$; wird eine von ihnen, etwa die a', kontinuierlich durchlaufen, so entspricht dem die kontinuierliche Durchlaufung der Kurve a^3 durch den einen der beiden entsprechenden Punkte. Der andere bleibt in A fest. Auf der Geraden a' liegen daher zwei Punkte A'_1 und A'_2, welche dem A als auf der a^3 zweimal durchlaufenen Punkte entsprechen.

Mit einer zweieindeutigen Verwandtschaft ist in der einfachen Ebene eine involutorische Cremonasche Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{1,1}$ verbunden, in welcher diejenigen beiden Punkte, welche je demselben Punkte der doppelten Ebene entsprechen, einander korrespondieren. Die Netzkurven entsprechen in dieser Verwandtschaft sich selbst.

Es sei in die Ebene Σ eine Gerade l gelegt. Ihr entspricht auf der F^3 eine Netz-r^3, welche aus $\mathfrak{G}$ durch einen Kegel dritter Ordnung K^3 projiziert wird. Der Schnitt von K^3 und F^3 ist eine Raumkurve neunter Ordnung, von der die r^3 einen Bestandteil bildet. Der Restbestandteil sechster Ordnung R^6 wird von denjenigen Punkten erfüllt, welche denen der r^3 auf der F^3 verbunden sind, bildet sich also in Σ in die Kurve ab, welche der l in der involutorischen Verwandtschaft entspricht.

Der K^3 trifft die a in drei Punkten; da die r^3 gegen die Fundamentalgeraden windschief ist, so hat die R^6 drei Punkte auf der a, und so auch auf den fünf übrigen Geraden b, . . f. Auch in der Tangentialebene von $\mathfrak{G}$ liegen drei Kanten des K^3; da die r^3 im allgemeinen nicht

mit $\mathfrak{G}$ inzidiert, so ist dieser Punkt dreifach auf der R^6. Die der Geraden l verbundene Kurve geht also dreimal durch einen jeden der sieben Hauptpunkte[1]).

Um festzustellen, welcher Ordnung diese Kurve ist, schneide man die R^6 mit einer zweiten Netzkurve dritter Ordnung, etwa der $\bar{r}^3$. Beide, die $\bar{r}^3$ und die R^6 bezw. r^3, werden aus $\mathfrak{G}$ durch Kegel dritter Ordnung projiziert, welche neun Kanten gemeinsam haben. Eine davon geht nach dem einzigen Schnittpunkt (r^3, $\bar{r}^3$), auf den anderen acht schneidet sich die $\bar{r}^3$ mit der R^6. Das Bild der R^6 in Σ ist eine Kurve achter Ordnung. *Die verbundene involutorische Verwandtschaft* $\mathfrak{T}_{1,1}$ *ist also achten Grades und besitzt in den Punkten A, . . G sieben dreifache Hauptpunkte; die zugehörigen Hauptkurven sind die* a^3, . . g^3. *Damit ist die* $\mathfrak{T}_{1,1}$ *als die Geisersche Verwandtschaft*[2]) *erkannt;* sie ordnet solche zwei Punkte einander involutorisch zu, welche sieben feste Punkte zu einer Gruppe von neun assoziierten Punkten — die einen Büschel von Kurven dritter Ordnung bestimmen — ergänzen. Auf dieser Eigenschaft allein lässt sich nun die Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{1,1}$ aufbauen.

Die involutorische Geiser'sche Verwandtschaft besitzt eine Koinzidenzkurve sechster Ordnung. Diese lässt sich auch aus Eigenschaften der F^3 ableiten. Die allgemeine Fläche dritter Ordnung hat den Rang sechs, empfängt also aus einem jeden Punkte des Raumes einen Kegel sechster Ordnung von Tangenten, der längs einer Raumkurve sechster Ordnung berührt. Rückt die Kegelspitze auf die Fläche, hier nach $\mathfrak{G}$, so erniedrigt sich die Ordnung des Tangentenkegels um zwei auf vier, die der Berührungskurve $\mathfrak{R}^6$ bleibt ungeändert, und $\mathfrak{G}$ wird Doppelpunkt derselben. Diese $\mathfrak{R}^6$ ist der Ort der vereinigten verbundenen Punkte auf der F^3; ihr Abbild in Σ ist für die $\mathfrak{T}_{1,1}$ die Koinzidenzkurve, für

---

[1]) Auch daraus zu folgern, dass die l einer jeden der Kurven a^3, . . g^3 dreimal begegnet.

[2]) Geiser, Journal f. Mathem. Bd. 67, S. 78. — Sturm, Geom. Verw. IV, S. 96.

die $\mathfrak{T}_{2,1}$ die Doppelkurve Ω; ihr Projektionskegel vierter Ordnung aus $\mathfrak{G}$ geht in Σ' in *die Grenzkurve* Ω' über. Diese letztere *ist also vierter Ordnung.*

Der Kegel vierter Ordnung, in welchen die $\mathfrak{R}^6$ aus dem Punkte $\mathfrak{G}$ projiziert wird, hat mit dem Projektionskegel dritter Ordnung einer Netz-r^3 zwölf Kanten gemein. Von den drei Treffpunkten der F^3, die auf einem solchen Strahl liegen, ist einer der $\mathfrak{G}$; durch ihn geht die r^3 nicht. Die beiden anderen haben sich vereinigt; in diesem Punkt schneiden sich also die beiden Kurven. $\mathfrak{G}\mathfrak{S}$ sei eine von diesen zwölf Kanten; in dem Schnittpunkt $\mathfrak{S}$ seien an beide Kurven die Tangenten konstruiert. Sie werden von der Tangentialebene des Punktes $\mathfrak{S}$ aufgenommen, und diese geht durch $\mathfrak{G}$. Also haben die beiden Projektionskegel längs der Kante $\mathfrak{G}\mathfrak{S}$ dieselbe Tangentialebene, und so längs einer jeden der übrigen Schnittkanten. Sie berühren sich daher sechsmal, d. h. es existieren nur sechs Schnittpunkte der beiden Kurven $\mathfrak{R}^6$ und r^3. Daraus folgt, *dass* Ω *sechster Ordnung ist.*

Da $\mathfrak{G}$ Doppelpunkt der $\mathfrak{R}^6$ ist, so geht Ω zweimal durch sein Bild G. Eine jede Ebene durch die Gerade $\mathfrak{a}$ schneidet die F^3 noch in einem Kegelschnitt, welcher die $\mathfrak{a}$ zweimal trifft. In der Ebene $(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ sind diese beiden Treffpunkte auf ihren Strahlen durch $\mathfrak{G}$ die einzigen Schnitte mit der F^3 (ausser $\mathfrak{G}$) und liegen daher auf der $\mathfrak{R}^6$. Es zeigt sich, *dass die* Ω *doppelt durch einen jeden der sieben Hauptpunkte A, . . G hindurchgeht.*

Als Ordnung der Grenzkurve Ω' ergab sich vier. Da der Projektionskegel der $\mathfrak{R}^6$ von demjenigen einer Netz-r^3, des Abbildes einer Geraden von Σ, sechsmal berührt wird, so folgt, *dass die Kurven* C' *die Grenzkurve* Ω' *je sechsmal berühren.*

Der Projektionskegel der $\mathfrak{R}^6$ aus $\mathfrak{G}$ sondert diejenigen Strahlen des Bündels $(\mathfrak{G})$, welche die F^3 reell schneiden, von denen mit imaginären Treffpunkten. Daher ergibt sich Ω' als die Grenze zwischen Punkten mit reellen und solchen mit imaginären entsprechenden Elementen.

Einem Punkte der Ebene Σ' sei nun in Σ die Verbindungslinie seiner beiden entsprechenden Punkte zugeordnet. Auch in der anderen Richtung ist diese Beziehung eindeutig: das einzige Paar verbundener Punkte, welches eine Gerade in Σ besitzt, bestimmt eindeutig den ihr korrespondierenden Punkt. Damit ist gleichzeitig eine Verwandtschaft zwischen der Ebene Σ' und der F^3 hergestellt; einem Punkte der ersteren ist diejenige Netz-r^3 zugeordnet, welche die beiden Flächenpunkte auf der entsprechenden Geraden durch $\mathfrak{G}$ verbindet. Einem r^3-Büschel der F^3 entspricht in Σ ein Strahlenbüschel, in Σ' die durch die Kollineation $(\mathfrak{G}, \Sigma')$ aus dem Kegel der einzelnen Doppelsekanten, welche sich von $\mathfrak{G}$ aus an seine Kurven legen lassen, entstehende Kurve. Da ihre Ordnung mit derjenigen des Kegels übereinstimmt, so kann diese als Gradzahl der jetzigen Verwandtschaft genommen werden.

Es sei s^3 eine auf der Fläche verlaufende kubische Raumkurve aus demjenigen Netze, welches dem der Kurven r^3 „verbunden“ ist, d. h. zu derselben Doppelsechs, aber in entgegengesetzter Weise gehört[1]); eine r^3 und s^3 zusammen schneiden jede der 27 Geraden der F^3 zweimal. Der r^3-Büschel mit dem Grundpunkt $\mathfrak{P}$ kann als Spur desjenigen Büschels von Flächen zweiter Ordnung aufgefasst werden, dessen Basis sich aus der s^3 und ihrer von $\mathfrak{P}$ ausgehenden Doppelsekante zusammensetzt. Die Raumkurve 6. Ordnung, die ein Element desselben einschneidet, begegnet einer jeden Geraden der F^3 zweimal. Da die s^3 zu diesem Schnitt gehört, so muss der Restbestandteil einer Kurve r^3 sein, und alle diese Kurven gehen durch $\mathfrak{P}$ und erschöpfen den Büschel um diesen Punkt, weil die einschneidenden Flächen einen Büschel erfüllen, dessen Basis mit diesem Punkte inzidiert.

Nun wird die ganze Figur mit Ebene β zum Schnitt gebracht, welche die Gerade $\mathfrak{G}\mathfrak{P}$ mit der Doppelsekante aus $\mathfrak{G}$ an eine Kurve des r^3-Büschels verbindet. Auf der Kurve

---

[1]) Sturm, Geom. Verw. II Nr. 381 S. 193.

$\mathfrak{C}^3 = (\beta, F^3)$ liegen die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels, welchen der Flächenbüschel in β besitzt, nämlich der Punkt $\mathfrak{P}$ und die drei Treffpunkte der s^3. Die noch fehlenden Schnittpunktpaare der Kurve $\mathfrak{C}^3$ mit den Kegelschnitten des Büschels liegen auf den Kurven r^3. Ihre Verbindungslinien, d. h. die in der Ebene β befindlichen Doppelsekanten des r^3-Büschels, welche nicht mit $\mathfrak{P}$ inzidieren, laufen in den Gegenpunkt der vier Fundamentalpunkte zusammen. Das ist jedoch der Punkt $\mathfrak{G}$, der für eine dieser Doppelsekanten als dritter Schnitt mit der $\mathfrak{C}^3$ konstruiert worden ist. Es ergibt sich also der Satz: *Liegt ein r^3-Büschel auf F^3 vor, so fallen diejenigen Doppelsekanten, die man von einem Punkte der Fläche an die einzelnen Kurven legen kann, sämtlich in eine Ebene durch den Grundpunkt des Büschels. Damit erweist sich die Verwandtschaft, die einem Punkte der Ebene Σ' die Verbindungslinie der beiden ihm in der $\mathfrak{T}_{2,1}$ entsprechenden Punkte zuordnet, als Korrelation.* Den Punkten der sieben Geraden $a', \ldots g'$ korrespondieren in der $\mathfrak{T}_{2,1}$ eindeutig diejenigen der Kurven $a^3, \ldots g^3$. Daraus folgt auch für diese Punkte die Möglichkeit der eindeutigen Zuordnung einer Geraden.

Auch den Punkten der Grenzkurve Ω' müssen eindeutig Gerade durch die entsprechenden Punkte der Doppelkurve Ω zugeordnet sein. Ihr Ort ist also eine Kurve *vierter Klasse.*

2.

Das Punktfeld einer Ebene Σ' sei kollinear auf einen Strahlenbündel bezogen, der seinen Scheitel $\mathfrak{A}$ auf einer kubischen Regelfläche[1]) F^3 hat. Durch Projektion aus einem Punkte ihrer Doppelgeraden $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{D}$, wird die F^3 eindeutig in eine Ebene Σ abgebildet. *Zwischen den beiden Feldern Σ und Σ' entsteht eine Verwandtschaft dadurch, dass man einem Punkte der letztgenannten Ebene die Bilder der beiden*

[1]) Die Eigenschaften einer solchen sind in: R. Sturm, die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung, Band I S. 48 zusammengestellt.

weiteren Treffpunkte der F^3 mit dem ihm in der Kollineation zugeordneten Strahl aus $\mathfrak{A}$ entsprechen lässt. Umgekehrt wird ein Punkt X der Ebene Σ aus $\mathfrak{D}$ projiziert und der Schnitt des Projektionsstrahles mit der F^3 mit $\mathfrak{A}$ verbunden. Der diesem Strahl in Σ' korrespondierende Punkt ist dann dem X als entsprechend zuzuordnen. *Die Verwandtschaft ist zweieindeutig* und wird daher fortan mit $\mathfrak{T}_{2,1}$ bezeichnet werden.

Einer Geraden l′ in Σ' entspricht auf der F^3 ein durch $\mathfrak{A}$ gehender ebener Schnitt $\mathfrak{C}^3$, welcher auf der Doppelgeraden $\mathfrak{d}$ einen Doppelpunkt besitzt und wie jede, so auch die beiden durch $\mathfrak{D}$ gehenden Erzeugenden $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ trifft. Als einer der beiden verbundenen Punkte, welche die $\mathfrak{C}^3$ durchlaufen, kommt der Punkt $\mathfrak{A}$ auf der in ihm berührenden Tangente zu stande. Durch Projektion aus $\mathfrak{D}$ nach Σ wird also die $\mathfrak{C}^3$ in eine Kurve dritter Ordnung C übergeführt, welche doppelt durch D, die Spur von $\mathfrak{d}$, und einfach durch B, C, A, die Spuren von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ und den Bildpunkt von $\mathfrak{A}$, geht. Sie ist das Abbild der Geraden l′. *Damit ist die Gradzahl drei der Verwandtschaft erkannt. Die Kurven C bilden ein Netz mit einem festen Doppelpunkt D und drei einfachen Hauptpunkten A, B, C.*

Geht die Gerade l′ durch den Punkt D′, der dem Strahl $\mathfrak{AD}$ in der Kollineation entspricht, so kommt $\mathfrak{D}$ als Doppelpunkt auf die $\mathfrak{C}^3$ zu liegen. Die entsprechende Kurve C in Σ zerfällt alsdann in drei Geraden, DB und DC, welche von den Spuren der in $\mathfrak{D}$ berührenden Tangenten erfüllt werden, und in die Spur der Trägerebene der $\mathfrak{C}^3$, da in dieser Ebene jeder Strahl durch $\mathfrak{D}$ einen Punkt des ebenen Schnittes $\mathfrak{C}^3$ projiziert; diese dritte Gerade geht stets durch A. Der Durchlaufung des Strahlenbüschels (D′) entspricht in Σ projektiv diejenige des Büschels um A durch die dritte Gerade.

Gleitet der Strahl aus $\mathfrak{A}$ an einer Erzeugenden $\mathfrak{g}$ der Fläche entlang, so besteht die $\mathfrak{C}^3$ aus dieser und einem Kegelschnitt, welcher jede Erzeugende einmal und die $\mathfrak{g}$ selbst zweimal trifft. Einer dieser beiden Schnittpunkte liegt

auf der Doppellinie $\mathfrak{d}$; die in ihm berührende Tangente wird von der Ebene $(\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{g}})$ aufgenommen, wobei unter $\mathfrak{g}$ die sich mit der $\mathfrak{g}$ auf der Doppellinie $\mathfrak{d}$ schneidende Erzeugende verstanden ist. Die entsprechende Kurve C zerfällt dann ebenfalls in eine Gerade g und einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$; jene geht durch D, dieser gehört dem Büschel (A B C D) an. Da die Ebenen $(\mathfrak{d}, \mathfrak{g})$ und $(\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{g}})$ eine Involution bilden, welche sich in den Strahlenbüschel um D überträgt, so berührt der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ im Punkte D die der g in dieser Involution gepaarte Gerade $\bar{g}$. Darin zeigt sich die Projektivität zwischen dem Strahlen- und dem Kegelschnittbüschel. Auf der Regelfläche werden die Punktreihen auf der Geraden $\mathfrak{g}$ und dem Kegelschnitt durch die Projektionsstrahlen aus $\mathfrak{A}$, welche verbundene Punkte der F^3 einschneiden, projektiv; hierin entsprechen die beiden Schnittpunkte von $\mathfrak{g}$ mit dem Kegelschnitt sich selbst. Daran wird durch die Uebertragung in die Ebene Σ nichts geändert. Auf den Geraden $\mathfrak{g}$ und den zugehörigen Kegelschnitten $\mathfrak{K}^2$ erfüllen die verbundenen Punkte projektive Reihen. Die beiden Schnitte $(\mathfrak{g}, \mathfrak{K}^2)$, von denen der eine stets nach D fällt, die in diesen Projektivitäten sich selbst entsprechen, sind sich selbst verbundene Punkte. Wir werden später eine interessante Kurve aus diesem System kennen lernen, auf der diese Projektivität ausartet. Die entsprechenden Geraden in Σ' umhüllen einen Kegelschnitt; den beiden durch einen Punkt X′ dieser Ebene gehenden Tangenten korrespondieren in der Kollineation jene beiden Ebenen durch den dem X′ zugeordneten Strahl, welche die durch seine zwei weiteren Treffpunkte mit der F^3 gehenden Erzeugenden aufnehmen.

Da dem Punkt $\mathfrak{D}$ der F^3 die beiden Geraden DB und DC zugehören, wie der Nachweis zerfallende Kurven C zeigt, die aus den Geraden DB und DC und einer dritten durch A gehenden bestehen, so wird durch Projektion einer Geraden l der Ebene Σ aus $\mathfrak{D}$ eine ebene Kurve $\mathfrak{C}^3$ aus der Regelfläche ausgeschnitten, für welche $\mathfrak{D}$ Doppelpunkt

ist. Daraus folgt, dass *die Kurven C′, welche den Geraden der Ebene Σ entsprechen, — entgegen der allgemeinen Theorie*[1]) *— im Punkte D′ einen festen Doppelpunkt besitzen.* Auf diese Weise erhalten sie das notwendige Geschlecht Null.

Der einzigen durch 𝔄 gehenden Erzeugenden α entspreche in Σ′ der Punkt A′; ihr Bild in Σ ist, da sie die Doppellinie δ trifft, die Gerade AD. Der Punkt A scheint demnach ein Hauptpunkt dritter Art zu sein. Man unterscheidet nämlich bei dem doppelten Felde Hauptpunkte erster Art, von welchen der eine korrespondierende unbestimmt ist, eine Hauptkurve beschreibt, während der andere ein fester Punkt ist, und Hauptpunkte zweiter oder dritter Art, wo beide korrespondierende unbestimmt sind und entweder verschiedene oder dieselbe Kurve durchlaufen. Der letzte Fall scheint hier vorzuliegen. Es wird sich jedoch später zeigen, dass eine andere Auffassung zutreffender ist. Da jede Gerade l der Ebene Σ die DA trifft, *so gehen alle Kurven C′ einfach durch den Punkt A′.* Es ist hier eine Abweichung von der allgemeinen Theorie festzustellen; während diese für die Kurven C′ drei feste einfache und einen veränderlichen Doppelpunkt vorschreibt[2]), besitzen sie in der vorliegenden Verwandtschaft einen festen Doppelpunkt und einen einfachen Hauptpunkt. Beide Daten sind äquivalent mit vier einfachen Bedingungen; der Hauptunterschied aber liegt darin, dass diese Bedingungen hier sämtlich linear sind, während im allgemeinen Falle auch eine nichtlineare Bedingung auftritt.

Im Punkte 𝔄 hat die F^3 eine bestimmte Tangentialebene α, welche die Erzeugende a aufnimmt. Ihr korrespondiert in der Kollineation (𝔄, Σ′) die mit A′ inzidente Gerade a′. Bewegt sich ein Punkt X′ auf a′, so dreht sich die kollinear zugeordnete Gerade um 𝔄 in der Ebene α. Von den zwei dem X′ auf der Fläche entsprechenden Punkten

[1]) Siehe diese bei Sturm, Geom. Verw. IV, Nr. 897, 898.

[2]) Sturm, Geom. Verw. IV, S. 246.

bleibt also der eine in $\mathfrak{A}$ fest, während der andere auf einem mit diesem Punkte inzidenten Kegelschnitt läuft, welcher ausserdem die Erzeugenden $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ trifft und die Doppellinie $\mathfrak{b}$ im Punkte $\mathfrak{A} \equiv (\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ schneidet, wobei er die Ebene $(\mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{a}})$ tangiert, wenn unter $\bar{\mathfrak{a}}$ die zweite durch $\bar{\mathfrak{A}}$ gehende Erzeugende der Fläche verstanden wird. Gelangt nun X' in den Punkt A', so ist sein beweglicher entsprechender Punkt auf der Fläche nach $\mathfrak{A}$ gekommen, der bisher in $\mathfrak{A}$ feste entsprechende Punkt aber wird auf der Erzeugenden $\mathfrak{a}$ unbestimmt. Daraus gewinnen wir zweierlei: 1) Auf der F^3 ist dem $\mathfrak{A}$ der oben erwähnte Kegelschnitt verbunden. 2) *Der Punkt A' ist ein Hauptpunkt erster Art* (siehe S. 15); auf der F^3 ist ihm der einzelne Punkt $\bar{\mathfrak{A}}$ und die Punktreihe der Erzeugenden $\mathfrak{a}$ entsprechend. Die Uebertragung in die Ebene Σ lehrt: *Die dem A in der $\mathfrak{T}_{2,1}$ verbundene Kurve*, welche seine Hauptkurve für die involutorische Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{1,1}$ werden wird, *ist derjenige Kegelschnitt, welcher durch A, B, C, D geht und in diesem Punkte die Gerade $\bar{a}$, das Bild der* $\mathfrak{a}$, *tangiert. Dem Punkte D ist die Punktreihe der Geraden DA verbunden.* Diese beiden Bestandteile, Kegelschnitt und Gerade setzen einen zerfallende C zusammen, wie sie auf S. 14 beschrieben werden, nämlich die unten erwähnte Kurve, auf der die Projektivität verbundener Punkte ausartet. Die singulären Elemente sind die beiden Treffpunkte A und D der Geraden $\mathfrak{a} \equiv AD$ mit dem Kegelschnitt. Analog zu ihnen sind auf den anderen Konstituenten des Systems die beiden sich selbst verbundenen Punkte.

Gleitet der Strahl aus $\mathfrak{A}$ an der Erzeugenden $\mathfrak{b}$ entlang, so beschreibt der verbundene Punkt auf der Fläche einen Kegelschnitt, welcher die $\mathfrak{b}$ zweimal trifft, davon einmal in $\mathfrak{D}$, und durch $\mathfrak{A}$ geht. *Also ist der Ort der verbundenen Punkte des B*, in welchen sich die $\mathfrak{b}$ abbildet, *die Gerade BA. Ebenso erfüllen die dem C verbundenen Punkte die Gerade CA.*

Die mit der $\mathfrak{T}_{2,1}$ verbundene involutorische Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{1,1}$ ordnet zwei Punkte einander zu, die in Σ denselben entsprechenden haben; auf der F^3 ist diese Verwandtschaft die Zuordnung solcher zwei Punkte, die mit $\mathfrak{A}$ auf einer Geraden liegen.

Einer Geraden l in Σ entspricht auf der F^3 ein durch $\mathfrak{D}$ doppelt gehender ebener Schnitt $\mathfrak{E}^3$, der aus $\mathfrak{A}$ durch einen Kegel dritter Ordnung K^3 projiziert wird. Von der Schnittkurve neunter Ordnung von K^3 und F^3 ist $\mathfrak{E}^3$ ein Bestandteil; die Restkurve sechster Ordnung wird von denjenigen Punkten erfüllt, welche der Punktreihe der $\mathfrak{E}^3$ auf der Fläche verbunden sind, bildet also bei der Projektion aus $\mathfrak{D}$ die der Geraden l in der Ebene Σ verbundene Kurve.

Die $\mathfrak{E}^3$ hat einen Punkt mit der durch $\mathfrak{A}$ gehenden Erzeugenden $\mathfrak{a}$ gemein, sodass $\mathfrak{a}$ zu der Kantenreihe des K^3 gehört. Da hier der verbundene Punkt unbestimmt wird, so sondert sich die $\mathfrak{a}$ von dem Ort sechster Ordnung ab, zurück bleibt eine Raumkurve fünfter Ordnung R^5.

$\mathfrak{E}^3$ geht zweimal durch $\mathfrak{D}$. Da dieser Punkt sich selbst verbunden ist, so liegt er auch doppelt auf der R^5, und die Kurve projiziert sich aus ihm durch einen Kegel dritter Ordnung, welcher in die Σ eine Kurve dritter Ordnung einschneidet. *Die verbundene involutorische Verwandtschaft ist also dritten Grades.* Wiederum ist eine Abweichung von der allgemeinen Theorie zu bemerken; diese schreibt für die $\mathfrak{T}_{1,1}$ den Grad fünf vor[1]).

Die Gerade $\mathfrak{b}$ wird von drei Kanten des K^3 getroffen; eine davon ist die doppelt zu rechnende $\mathfrak{AD}$. Da $\mathfrak{D}$ der einzige Punkt ist, welchen die $\mathfrak{E}^3$ auf der $\mathfrak{b}$ besitzt, so muss die R^5 die $\mathfrak{b}$, und aus demselben Grunde auch die $\mathfrak{c}$ und die $\mathfrak{d}$ einmal treffen. Der Schnittpunkt mit der Doppelgeraden ist bekannt; es ist der Punkt $\bar{\mathfrak{A}}$. Zwar hat sich die Gerade $\mathfrak{a}$ von der vollen Kurve sechster Ordnung abgesondert, dieser Punkt jedoch ist, da doppelt auf der Fläche, beizubehalten. - Die Tangente an die R^5 in diesem

[1]) Sturm, Geom. Verw. IV, S. 247.

Punkte wird aufgenommen von der Tangentialebene $(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$. Auch in der Tangentialebene des $\mathfrak{A}$ liegen drei Kanten des K^3. Eine davon ist die $\mathfrak{a}$; die beiden anderen lehren, dass $\mathfrak{A}$ Doppelpunkt der R^5 ist. Die Uebertragung in die Ebene Σ ergibt: *Die einer Geraden l verbundenen Kurve dritter Ordnung geht zweimal durch den Punkt A, einmal je durch B, C, D und berührt in dem letztgenannten Punkte die Gerade a.* Die Hauptkurven der Punkte A, B, C, D sind die ihnen in der $\mathfrak{T}_{2,1}$ verbundenen Gebilde.

Da an der Lage verbundener Punkte der F^3 in gerader Linie mit $\mathfrak{A}$ durch die Projektion aus $\mathfrak{D}$ nichts geändert wird, *so lässt sich die Verwandtschaft* $\mathfrak{T}_{1,1}$ *in* ∞^1 *Involutionen auf den Strahlen des Büschels um A auflösen.* Diesem Punkte ist dabei der zweite Treffpunkt seines Hauptkegelschnitts als gepaart zuzuordnen. Als die Doppelpunkte der Involutionen werden sich die Schnitte mit der Koinzidenzkurve Ω ergeben. Eine beliebige Gerade l der Ebene Σ enthält also im allgemeinen keine Paare verbundener Punkte.

Daraus folgt, dass die drei Schnitte einer Geraden mit ihrer verbundenen Kurve aus sich selbst verbundenen Punkten bestehen, d. h. *dass die Koinzidenzkurve* Ω *dritter Ordnung ist.* Für diese Kurve haben wir bereits früher (S. 14), bei Betrachtung eines Systems zerfallender Kurven C, welche aus einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ des Büschels (A B C D) und einer mit D inzidenten Geraden g bestehen, eine projektive Erzeugung gewonnen. Wir erkannten die beiden Schnittpunkte $(g, \mathfrak{K}^2)$ als sich selbst verbunden, d. h. auf der Koinzidenzkurve Ω gelegen. Diese ist also das Erzeugnis der beiden projektiven Büschel (A B C D) und (D). Die Punkte A, B, C liegen als Fundamentalpunkte einfach auf ihr, der Punkt D hingegen wird als gemeinsamer Grundpunkt der beiden erzeugenden Büschel ein Doppelpunkt[1]).

[1]) Sturm, Geom. Verw. I. Nr. 171 S. 251.

Ist die Koinzidenzkurve Ω und der Punkt A gegeben, so reicht dies aus, um die involutorische Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{1,,}$ aufzubauen. Auf jedem Strahl durch A sind seine beiden weiteren Schnitte mit der Ω die Doppelpunkte der Involution verbundener Punkte, welche er trägt. Dem Punkte A ist auf jedem Strahl der zweite Schnitt seiner Hauptkurve gepaart; dieser muss also mit A ein Punktepaar liefern, das von den Doppelpunkten der Involution harmonisch getrennt wird. *Der dem A zugehörige Hauptkegelschnitt erweist sich als die erste Polare der Koinzidenzkurve Ω inbezug auf den Punkt A als Pol.* Die Involutionen verbundener Punkte werden parabolisch auf den beiden von A ausgehenden Tangenten und auf dem durch den Doppelpunkt der Ω gehenden Strahl. Die beiden Berührungspunkte und der Doppelpunkt liefern die drei einfachen Hauptpunkte B, C, D der Verwandtschaft. Zugleich zeigt sich wiederum, dass dem D alle Punkte der Geraden DA als verbunden zuzuordnen sind, sodass A′ für die Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,1}$ als Hauptpunkt erster Art angesehen werden muss.

Die Koinzidenzkurve Ω lässt sich auch aus Eigenschaften der F^3 ableiten. Diese hat, da jeder ebene Schnitt auf der Doppellinie $\mathfrak{d}$ einen Doppelpunkt erhält, den Rang vier, d. h. sie empfängt aus einem beliebigen Punkte des Raumes einen Kegel vierter Ordnung von Tangenten, der längs eine Raumkurve vierter Ordnung berührt. Rückt die Spitze des Kegels auf die Fläche, z. B. nach $\mathfrak{A}$, so erniedrigt sich die Ordnung des Kegels auf zwei, die der Berührungskurve bleibt vier, aber sie erhält in $\mathfrak{A}$ einen Doppelpunkt. Zu der Berührungskurve gehört auch die Gerade $\mathfrak{a}$, auf welcher der Berührungspunkt unbestimmt ist. Die Projektion des Restbestandteils dritter Ordnung aus $\mathfrak{D}$ ergibt in Σ die Koinzidenzkurve dritter Ordnung Ω.

Die Raumkurve dritter Ordnung geht noch einmal durch den Punkt $\mathfrak{A}$. Von ihren drei Schnittpunkten mit der Ebene $(\mathfrak{a}, \mathfrak{d})$ liegen also zwei auf der Geraden $\mathfrak{d}$; es sind die beiden Kuspidalpunkte derselben, deren Tangentialebenen innerhalb eines Büschels unbestimmt sind. Die

dritten Schnittpunkte in den Ebenen (𝔡, 𝔟) und (𝔡, 𝔠) müssen dann auf den letztgenannten Geraden liegen, und *es bestätigt sich, dass die* Ω *einfach durch A, B, C und doppelt durch D geht.*

Der Kegel zweiter Ordnung, der die kubische Raumkurve aus $\mathfrak{A}$ projiziert, lehrt, dass *die Grenzkurve* Ω′ *ein Kegelschnitt ist.* Die Raumkurve trifft einen durch $\mathfrak{D}$ gehenden ebenen Schnitt $\mathfrak{E}^3$, das Abbild einer Geraden l von Σ, dreimal. Die in den Schnittpunkten konstruierten Tangentenpaare an die beiden Kurven liegen in den Tangentialebenen dieser Punkte, und diese gehen durch $\mathfrak{A}$. So zeigt sich, dass die Kegel, welche beide Kurven aus $\mathfrak{A}$ projizieren, sich längs dreier Kanten berühren. *Die den Geraden der Ebene* Σ *entsprechenden Kurven C′ berühren den Grenzkegelschnitt* Ω′ *dreimal.*

Der Doppelpunkt D und die drei einfachen Punkte A, B, C bestimmen ein dreifach unendliches System, ein Gebüsch von Kurven dritter Ordnung $\overline{C}$. Innerhalb desselben erfüllen die den Geraden der Ebene Σ′ entsprechenden Kurven C ein Netz. Zu dem Gebüsch gehört auch die Koinzidenz- bezw. Doppelkurve Ω. Ihre beiden ausserhalb von Hauptpunkten liegenden Schnitte mit einer $\overline{C}$ bestimmen einen Kurvenbüschel aus dem Gebüsch. Das entsprechende Kurvensystem in Σ′ hat zwei feste Punkte auf der Grenzkurve Ω′; ihm gehört die doppelt zu zählende Verbindungsgerade dieser beiden Punkte an, denn jeder Büschel enthält aus einem beliebigen Netz des Gebüsches, also auch aus dem der Kurven C, ein Element, und dieses liefert die Doppelgerade. Von der Schnittkurve neunter Ordnung, die dem eine $\overline{C}$ aus $\mathfrak{D}$ projizierenden Kegel mit der F^3 gemein ist, lösen sich die Geraden 𝔟 und 𝔠 einfach und die 𝔡 vierfach ab. Es bleibt eine durch $\mathfrak{A}$ gehende allgemeine Kurve dritter Ordnung zurück, allgemein deswegen, weil eine Gerade der F^3, die ja Bestandteil der zerfallenden Kurve sein müsste, wiederum — von 𝔟, 𝔠, 𝔡 abgesehen — eine Gerade zum Abbild hat. Ist diese Kurve dritter Ordnung eben, so

korrespondiert ihr in Σ' eine Doppelgerade, sonst ein Kegelschnitt. *Einem C-Büschel, dem die Ω angehört, entspricht in der Ebene Σ' eine die Grenzkurve Ω' umfassende Büschel-Schar von Kegelschnitten.* Denn hätten zwei von ihnen einen weiteren Treffpunkt, so müssten die entsprechenden Kurven des $\bar{C}$-Büschels sich ausserhalb der Grundpunkte noch schneiden. *Den Kurven $\bar{C}$ entspricht in Σ' das System der die Grenzkurve Ω' doppelt berührenden Kegelschnitte, wobei die doppelt zu zählenden Geraden der Ebene einbegriffen sind.*

Eine C geht durch die Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{1,1}$ wieder in eine Kurve des Gebüsches über. Auf der F^3 entspricht ihr eine Kurve dritter Ordnung, welche durch $\mathfrak{A}$ geht; sie kann eben oder doppelt gekrümmt sein. Diese hat, da auf der $\mathfrak{a}$ keiner ihrer Punkte mehr liegen kann — die $\bar{C}$ hat ja auf der AD ausser den beiden Punkten A und D keinen weiteren Schnitt —, die $\mathfrak{d}$ zur Doppelsekante, und daraus folgt weiter, dass sie je einen Punkt auf $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ und allen Erzeugenden hat. Es zeigt sich nun, dass die auf der F^3 verbundene Kurve sich mit der ebenen Kurve dritter Ordnung deckt, dass sie, falls jene doppelt gekrümmt ist, eine kubische Raumkurve von denselben Eigenschaften ist, was die Schnitte mit den Geraden $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ anlangt. *Die $\mathfrak{T}_{1,1}$ bewirkt also innerhalb des Gebüsches eine eindeutige und involutorische Verwandtschaft.* Durchläuft die $\bar{C}$ den durch die beiden Punkte X und Y bestimmten Büschel, so bewegt sich die zugeordnete Kurve innerhalb des durch die verbundenen Punkte $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ festgelegten Büschels. *Die Verwandtschaft ist also Kollineation.* Jeder Büschel, der zwei verbundene Punkte X und $\bar{X}$ in der Grundgruppe besitzt, trägt eine Konjektivität zugeordneter Kurven. Sie wird Identität, da zwei entsprechenden Elementen noch die beiden Schnitte mit der Ω gemein sind. Es ergibt sich: *Eine Kurve $\bar{C}$ geht durch die $\mathfrak{T}_{1,1}$ in sich selbst über, sobald sie ein Paar verbundener Punkte besitzt.* Zwei derartige Büschel haben stets eine

Kurve gemein; denn legt man innerhalb des ersten die $\bar{C}$ durch einen der beiden Grundpunkte des zweiten, so muss sie, da sie durch die $\mathfrak{T}_{1,1}$ in sich selbst transformiert wird, auch mit dem zweiten Grundpunkt inzident sein. Die Kurven $\bar{C}$, welche durch die $\mathfrak{T}_{1,1}$ in sich selbst übergeführt werden, bilden also — was wir bereits wissen — ein Netz $\mathfrak{N}$. Ihm entspricht in der $\mathfrak{T}_{2,1}$ das Geradenfeld der Ebene Σ'.

Verbindet man zwei Kurven $\bar{C}$, welche durch die $\mathfrak{T}_{1,1}$ aus einander hervorgehen, durch einen Büschel, so enthält dieser stets die Kurve Ω, da diese beiden Kurven sich auf ihr zweimal schneiden. Ein solcher Büschel wird durch die $\mathfrak{T}_{1,1}$ ebenfalls in sich selbst transformiert und trägt daher eine Involution zugeordneter Kurven. Die beiden Koinzidenzen sind Ω und der Schnitt mit dem Netz $\mathfrak{N}$. *Die Verwandtschaft, welche durch die* $\mathfrak{T}_{1,1}$ *in dem Gebüsch der Kurven* $\bar{C}$ *hervorgerufen wird, stellt ein Analogon zu der involutorischen räumlichen Homologie dar;* Ω *bildet das Zentrum, das Netz der Kurven* C *die „Ebene" derselben.* Jede Kurve innerhalb von $\mathfrak{N}$, jedes Netz durch Ω entsprechen in der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{1,1}$ sich selbst.

Die im ersten Abschnitt dieses Kapitels betrachtete Verwandtschaft, die einem Punkte von Σ' die Verbindungslinie seiner beiden in der $\mathfrak{T}_{2,1}$ entsprechenden Punkte zuordnet, führt hier zu einer ausgearteten Korrelation, basiert auf die Projektivität der Büschel um D′ und A, da zwei verbundene Punkte stets auf einer Geraden durch A liegen. Auch dies ist eine Abweichung von der allgemeinen Theorie, welche diese Verwandtschaft als quadratisch nachweist[1]).

[1]) Sturm, Geom. Verw. IV, S. 249.

Kapitel II.

Zweizweideutige Verwandtschaften, welche durch gemeinsame Sekanten einer Raumkurve und einer Geraden hergestellt sind.

1.

Eine kubische Raumkurve R^3 und eine sie einmal — in G — treffende Gerade g rufen zwischen den Punkten zweier Felder Σ und Σ' eine zweizweideutige Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ hervor, wenn man die Spuren solcher Geraden, welche die R^3 und die g in getrennten Punkten treffen[1]*, in den beiden Ebenen einander als entsprechend zuordnet.* Aus einem jeden Punkt des Raumes — also auch von Σ und Σ' — wird die R^3 durch einen Kegel dritter Ordnung, die g durch einen Strahlenbüschel projiziert. Von den drei gemeinsamen Kanten beider geht die eine nach G; die beiden übrigen schneiden in die andere Ebene die zwei entsprechenden Punkte ein.

Zwei Geraden, l in Σ und l′ in Σ', bestimmen zusammen mit der g die Regelschar [ll′g] ihrer gemeinsamen Treffstrahlen. Die sechs Schnittpunkte ihrer Trägerfläche zweiter Ordnung mit der R^3 lehren, dass es sechs Geraden gibt, welche den l, l′, g und der R^3 begegnen. Eine davon ist die durch G gehende Erzeugende der [ll′g]; die fünf übrigen sind $\mathfrak{T}$-Strahlen und liefern also fünf Paare entsprechender Punkte auf den Geraden l und l′. *Die Verwandtschaft ist fünften Grades.* Eine Gerade der einen Ebene geht durch die $\mathfrak{T}_{2,2}$ in eine Kurve fünfter Ordnung, C in Σ, C′ in Σ', über, welche von den beiden dem beweglichen Punkte der Geraden entsprechenden Punkten durchlaufen wird.

Es seien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ die Spuren der Geraden g, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ die Schnitte der R^3 mit den Ebenen Σ und Σ'. Ferner seien A, B, C die Spuren der Geraden $\mathfrak{G}'$ ($\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$) in Σ, A′, B′, C′ diejenigen von $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$) in Σ'. Gleitet ein Strahl aus $\mathfrak{A}$ an der g entlang, so ist seine Spur

---

[1]) Derartige Geraden werden fortan $\mathfrak{T}$-Strahlen genannt werden.

in Σ' stets ein dem $\mathfrak{A}$ entsprechender Punkt; deren Ort ist die Gerade $\mathfrak{G}'A'$ (Fig. 1). Von ihren Punkten ist einer wichtig, nämlich der Schnitt $\bar{\mathfrak{A}}'$ der einzigen — neben der $\mathfrak{A}G$ — durch $\mathfrak{A}$ gehenden Doppelsekante der R^3, welche die g trifft. *Von den beiden dem $\mathfrak{A}$ entsprechenden Punkten ist einer der $\bar{\mathfrak{A}}'$, der andere ist auf der mit ihm inzidenten Geraden $\mathfrak{G}'A'$ unbestimmt geworden. Ebenso entsprechen den Punkten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die einzelnen Punkte $\bar{\mathfrak{B}}'$ und $\bar{\mathfrak{C}}'$,* die auf ähnliche Weise wie $\bar{\mathfrak{A}}'$ zustande kommen, *und die Punktreihen der Geraden $\mathfrak{G}'B'$ und $\mathfrak{G}'C'$.*

Durch den Punkt A der Ebene Σ gehen zwei $\mathfrak{T}$-Strahlen; einer davon ist die Gerade $\mathfrak{G}'\mathfrak{A}'$, der andere fällt in keine der beiden Ebenen Σ und Σ'. *Die Punkte A, B, C sind also sich selbst entsprechend, daneben gehören ihnen noch die Punktreihen $\mathfrak{G}'\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{G}'\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{G}'\mathfrak{C}'$ als entsprechend zu.*

Aus $\mathfrak{G}$ wird die R^3 durch einen Kegel dritter Ordnung projiziert, dessen sämtliche Kanten die Eigenschaft haben, die R^3 und die g in gesonderten Punkten zu treffen. Auch die Gerade g selbst erfüllt diese Bedingung: auf ihr ist der Schnittpunkt mit ihr selbst unbestimmt. *Dieser Kegel schneidet die Ebene Σ in einer Kurve dritter Ordnung $\mathfrak{H}'$, welche einfach durch $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, A', B', C' geht und einen Doppelpunkt besitzt. Sie ist der Ort der dem $\mathfrak{G}$ entsprechenden Punkte.* Zu ihrer Kennzeichnung benützen wir

$$\mathfrak{H}'3\ (\mathfrak{G}', \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}', A', B', C').$$

Die hinter dem Kurvennamen stehende Zahl bedeutet die Ordnung; höhere Vielfachheiten einzelner Punkte werden durch die dahinter gesetzte Zahl ausgedrückt.

Der Punkt $\mathfrak{G}$ zeigt ein anderes Verhalten als die einfachen Hauptpunkte; seine entsprechenden Punkte sind beide auf derselben Kurve unbestimmt, während den übrigen Hauptelementen je ein fester und ein unbestimmt gewordener Punkt als entsprechend zugehört.

Eine Gerade l' in Σ' begegnet den in dieser Ebene gelegenen Hauptkurven: von den beiden durch einen solchen Schnittpunkt gehenden $\mathfrak{T}$-Strahlen trifft der eine den ent-

sprechenden Hauptpunkt. *Die der Geraden l' durch die Verwandtschaft* $\mathfrak{T}_{2,2}$ *zugeordnete Kurve C' geht daher dreimal durch* $\mathfrak{G}$, *einfach je durch* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, *A*, *B*, *C*, also

$$C\,5\,(\mathfrak{G}\,3,\,\mathfrak{A},\,\mathfrak{B},\,\mathfrak{C},\,A,\,B,\,C).$$

Analog findet man die Hauptkurven in Σ und die Hauptpunkte für die den Geraden dieser Ebene entsprechenden Kurven C'.

Die durch einen jeden Punkt der einen oder anderen Ebene gehenden $\mathfrak{T}$-Strahlen werden im allgemeinen verschieden sein. Es kommt aber auch vor, dass sie sich zu einer die g — ausserhalb von G — treffenden Doppelsekante vereinigen. Die Spuren der Regelschar, welche sie erfüllen[1]), in den Ebenen Σ und Σ' sind zwei Kegelschnitte, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$. Der in Σ' liegende $\mathfrak{K}'$ geht durch $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ und den Doppelpunkt der Hauptkurve des $\mathfrak{G}$, also

$$\mathfrak{K}'\,2\,(\mathfrak{G}',\,\mathfrak{A}',\,\mathfrak{B}',\,\mathfrak{C}',\,\bar{\mathfrak{A}}',\,\bar{\mathfrak{B}}',\,\bar{\mathfrak{C}}').$$

Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{K}'$ besitzen zwei wichtige Eigenschaften. *Sie sind einmal der Ort solcher Punkte, deren entsprechende sich vereinigen, und zugleich Ort von verbundenen*[2]) *koinzidierenden Punkten.* Ihre Punkte stehen in eindeutiger Zuordnung; *jedem Punkte des einen Kegelschnitts entspricht in der* $\mathfrak{T}_{2,2}$ *der zugeordnete des anderen doppelt.*

Die gleiche Eigenschaft besitzen die Punkte der Geraden $(\Sigma\Sigma')$. Die durch einen solchen Punkt gehenden $\mathfrak{T}$-Strahlen fallen im allgemeinen in keine der beiden Ebenen. *Daher vereinigt sich jeder Punkt dieser Geraden* $(\Sigma\Sigma')$ *mit seinen beiden entsprechenden.*

Eine Gerade l' in Σ' trifft den $\mathfrak{K}'$ zweimal, die $(\Sigma\Sigma')$ einmal. Ein jeder dieser drei Schnittpunkte hat einen einzigen entsprechenden in Σ, während seine Nachbarpunkte auf l' deren zwei besitzen. Diese drei Punkte müssen also zu Doppelpunkten führen. *Die einer Geraden l' der Ebene* Σ' *entsprechende C besitzt noch drei Doppelpunkte; einer*

[1]) Sturm, Geom. Verw. I, S. 308.

[2]) Zwei Punkte heissen verbunden, wenn sie einen gemeinsamen entsprechenden besitzen.

davon ist der (l', Σ), *die beiden anderen liegen auf dem Kegelschnitt* $\mathfrak{K}$. Damit erhalten die Kurven C das Geschlecht Null.

Die kubische Raumkurve hat den Rang vier[1]); vier von ihren Tangenten treffen also eine beliebige Gerade des Raumes. Wird diese eine (einfache) Sekante der Kurve, hier die g, so vereinigen sich in der in G berührenden t zwei auf einander folgende Tangenten, welche die g treffen. Die Berührungspunkte der beiden übrigen seien T_1 und T_2. In der Ebene (g, T_1) liegen die Punkte G und T_1 der Raumkurve; in dem letztgenannten haben sich zwei konsekutive Elemente der R^3 vereinigt. Alle Geraden des Büschels (T_1, g) sind $\mathfrak{T}$-Strahlen und schneiden in die Ebenen Σ und Σ' entsprechende Punkte der Verwandtschaft ein. Die Spuren der Ebene (g, T_1) in Σ und Σ', die Geraden t_1 und t'_1, tragen also perspektive Reihen entsprechender Punkte. Es wurde bereits hervorgehoben, dass in T_1 zwei auf einander folgende Punkte der Raumkurve vereinigt sind; man muss daher auch den Büschel, dessen Strahlen die entsprechenden Punkte einschneiden, doppelt oder genauer die beiden Scheitel unendlich nahe annehmen, *sodass einem jeden Punkte der einen Geraden der in der Perspektivität zugeordnete der anderen und sein Nachbarpunkt entspricht.* Dasselbe gilt von den beiden Spuren der Ebene (g, T_2), den Geraden t_2 und t'_2.

In der Ebene (g, t) liegt der Punkt G und sein Nachbarpunkt auf der R^3 sowie ein dritter Punkt derselben. Die Büschel um diesen und den G — genauer seinen Nachbarpunkt —, welche mit ihren sämtlichen Strahlen die g treffen, schneiden entsprechende Punkte der $\mathfrak{T}_{2,2}$ ein. Diese Ebene führt also zu nichts Besonderem.

Die Ebenen (g, t), (g, T_1) und (g, T_2) stehen in Beziehung zu den Hauptkurven der Punkte $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$. Sie gehen einfach durch $\mathfrak{G}'$ bezw. $\mathfrak{G}$ und sind, da sie einen Doppelpunkt besitzen, vierter Klasse. Zieht man in der Ebene (g, t) durch den Nachbarpunkt des G den Strahl durch $\mathfrak{G}$, so trifft er die Σ' in einem dem $\mathfrak{G}'$ unendlich

[1]) Sturm, Geom. Verw. I, S. 311.

nahen Punkt, der auf der Hauptkurve des $\mathfrak{G}$ liegt. *Die Spur der Ebene* (g, t) *in* Σ' *liefert die in* $\mathfrak{G}'$ *berührende Tangente der Hauptkurve des* $\mathfrak{G}$. Legt man ferner durch die beiden in T_1 vereinigten Punkte der R^3 die Strahlen nach $\mathfrak{G}$, so treffen sie die t'_1 in zwei unendlich benachbarten Punkten, die der Hauptkurve des $\mathfrak{G}$ angehören. *Die Geraden* t'_1 *und* t'_2 *sind die beiden von* $\mathfrak{G}'$ *ausgehenden Tangenten der Kurve*[1]).

Auch für die Kurven C und C′, deren Klasse infolge des dreifachen Punktes $\mathfrak{G}$ bezw. $\mathfrak{G}'$ und dreier Doppelpunkte $8 = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2$ ist, werden die Geradenpaare t_1, t'_1 und t_2, t'_2 von Bedeutung. Den beiden Schnitten (l', t'_1) und (l', t'_2) entsprechen je zwei unendlich nahe Punkte auf t_1 und t_2. *Die Kurven C berühren also die Geraden* t_1 *und* t_2, *und diese bilden neben den drei in* $\mathfrak{G}$ *selbst berührenden die sämtlichen von diesem Punkte ausgehenden Tangenten.*

Die Strahlenpaare t_1, t'_1 und t_2, t'_2 haben die Eigenschaft, dass zu einem jeden Punkte der einen Geraden die beiden entsprechenden auf der anderen liegen. Mit derartigen Geradenpaaren sind die Büschel um $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ durchweg erfüllt. Einem Punkte X′ von Σ' entsprechen zwei Punkte X und X in Σ, eingeschnitten von solchen Strahlen aus X′, welche die g (und die R^3) treffen. Sie liegen also auf einer Geraden g durch $\mathfrak{G}$, nämlich der Spur der Ebene (X′, g) in Σ, und diese bleibt fest, wenn der Punkt X′ sich auf seiner Verbindungslinie g′ mit $\mathfrak{G}'$, der Spur der genannten Ebene in Σ', bewegt. Die Ebene (g, g′) trifft die Raumkurve ausser in G noch zweimal, in S_1 und S_2. Die Strahlenbüschel aus diesen Punkten schneiden in die Geraden g und g′ die entsprechenden Punkte ein. Durchläuft also X die Gerade g, so beschreiben seine beiden entsprechenden Punkte konjektive Reihen auf g′, und umgekehrt. Die

[1]) Dieser Schluss (siehe auch den folgenden Abschnitt) wird gestützt, wenn es sich später zeigt, dass längs der Geraden t bezw. t ein Wechsel in der Art des Entsprechens stattfindet.

beiden Koinzidenzen sind stets reell, es sind der Schnitt mit der Geraden ($\Sigma\Sigma'$) und der zweite Treffpunkt mit $\mathfrak{K}'$ bezw. $\mathfrak{K}$, eingeschnitten durch die Gerade S_1S_2. *Die Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ lässt sich auf die perspektive Lage der Strahlenbüschel um $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ basieren; auf zwei korrespondierenden Geraden ordnen sich die entsprechenden Punkte zu der oben beschriebenen Doppel-Perspektivität an. Der einen der beiden Geraden entspricht in der $\mathfrak{T}_{2,2}$ die andere doppelt.* Da die Punkte $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ dreifache Hauptpunkte der Verwandtschaft fünften Grades sind, so folgt: Liegt die einer Geraden l' von Σ' entsprechende Kurve vor, so schneidet jeder Strahl durch $\mathfrak{G}$ in zwei weiteren Punkten, die einen gemeinsamen entsprechenden auf l' besitzen.

Auf den sechs Paaren der in den Punkten A, B, C, A', B', C' sich schneidenden Strahlen artet eine der beiden Perspektivitäten, welche durch die Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ in den Punktreihen zweier Geraden $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ hervorgerufen werden, aus. Auf dem Paar $\mathfrak{G}'\mathfrak{A}'A$ und $\mathfrak{G}\mathfrak{A}A$ sind $\mathfrak{A}'$ und A, d. h. *die einfachen Hauptpunkte singuläre Elemente.*

Von Wichtigkeit sind auch jene Paare von Geraden $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$, welche einer solchen die g treffenden Doppelsekante der Raumkurve begegnen, deren Stützpunkte von ihren Spuren in den Ebenen Σ und Σ' harmonisch getrennt werden. Zur Bestimmung ihrer Anzahl führt die eindeutige und involutorische Verwandtschaft dritten Grades der inbezug auf die R^3 konjugierten Punkte[1]); die Spuren der gesuchten Doppelsekanten in den beiden Ebenen sind solche. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welchen die Regelschar der die g treffenden Doppelsekanten in der Ebene Σ besitzt (S. 25), geht durch diese Verwandtschaft in eine Raumkurve 6. Ordnung über, zu der indessen die Tangenten der R^3 in den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gehören. Die drei Schnittpunkte der restierenden kubischen Raumkurve mit der Ebene Σ' lehren, dass es drei Doppelsekanten der R^3 und damit auch drei Geradenpaare

[1]) Sturm, Journal f. Math. Bd. 70 S. 212 Nr. 49. — Geom. Verw. IV, Nr. 959 S. 408.

g/g' gibt, wie wir sie suchen. Sie werden fortan durch Ueberstreichen und Anfügung der Zeiger 1, 2, 3 gekennzeichnet werden.

Diese Zahl lässt sich auch nach einer anderen Methode, welche später noch wiederholt benutzt werden wird, gewinnen. Die Ebenen des Büschels um $(\Sigma\Sigma')$, welche nach den Begegnungspunkten der die g treffenden Doppelsekanten[1]) gehen, erzeugen eine involutorische Korrespondenz [3], und diese hat mit der gemeinen Involution der zu Σ, Σ' harmonischen Ebenen drei Paare gemein[2]). Durch sie werden die gesuchten Doppelsekanten der R^3 bezw. Geradenpaare g/g' bestimmt.

Zu einem Punkt X' von $\bar{g}'_1$ werden die beiden entsprechenden X und X auf $\bar{g}_1$ durch die $\mathfrak{T}$-Strahlen $X'S_1$ und $X'S_2$ eingeschnitten. (Fig. 2). Sie bilden mit den beiden in $\bar{X}'$ sich schneidenden XS_2 und $\bar{X}S_1$ ein vollständiges Vierseit, für welches S_1 und S_2 Gegenecken und also S_1S_2 Diagonale ist. Eine zweite ist die $\bar{g}_1$. Der bekannte Satz: Auf der Diagonale eines vollständigen Vierseits werden die beiden Gegenecken durch die Diagonalpunkte harmonisch getrennt lehrt, auf die S_1S_2 angewendet, dass $\bar{g}'_1$ die fehlende dritte Diagonale ist, dass also $\bar{X}'$ auf $\bar{g}'_1$ liegt. Die beiden Punkte X und $\bar{X}$ entsprechen daher in der $\mathfrak{T}_{2,2}$ nicht nur dem X', sondern auch dem $\bar{X}'$, freilich verkehrt: Von X' führen zu ihnen die Perspektivitäten mit den Zentren S_1, S_2, von $\bar{X}'$ diejenigen um S_2, S_1. Durch Anwendung des oben erwähnten Satzes auf die Diagonalen $\bar{g}_1$ und g'_1 findet man, dass X' und $\bar{X}'$ und zugleich X und $\bar{X}$ Involutionen durchlaufen; Doppelelemente sind der Schnitt $(\bar{g}_1, \bar{g}'_1)$ und je der Treffpunkt mit der

[1]) Im Kontinuum derselben ist die in die Ebene (g, t) fallende als die einzige durch G gehende anzusehen. Dadurch wird die Endlichdeutigkeit der Korrespondenz gewahrt.

[2]) Sturm, Geom. Verw. I, Nr. 196 S. 292.

Doppelsekante $S_1 S_2$. *Auf den drei Geradenpaaren* $\overline{\mathfrak{g}}$, $\overline{\mathfrak{g}'}$ *ist die Doppel-Perspektivität Projektivität zweier Involutionen, dergestalt, dass einem jeden Element des einen Paares in der* $\mathfrak{T}_{2,3}$ *die beiden Punkte des zugeordneten entsprechen.* Diese drei Geradenpaare werden für die noch zu behandelnden verbundenen Verwandtschaften von grosser Bedeutung werden.

Jede Ebene durch g trifft die R^3 in zwei Punkten; wenn sich diese vereinigen, so erfolgt ein Uebergang von reell schneidenden Ebenen zu solchen mit konjugiert imaginären Treffpunkten. Diese Grenze bilden die Ebenen (t_1, t'_1) und (t_2, t'_2). Sind sie imaginär, dann trifft jede Ebene durch g die R^3 zweimal reell; die Folge ist, dass jeder reelle Punkt reelle entsprechende hat und dass die Kurven C sich über das ganze Feld Σ ausbreiten. Sind dagegen die genannten Ebenen reell, so sondern ihre Spuren die Punkte mit reellen entsprechenden von denen, welchen konjugiert imaginäre Elemente entsprechen. Daraus ersieht man nun, dass die Geraden t_1 und t_2 Tangenten der Kurven C werden müssen, und zwar die einzigen vom Punkte $\mathfrak{G}$ ausgehenden. Auf jedem Geradenpaare g, g′ gibt es indessen zwei reelle Paare entsprechender Punkte, die zweiten Schnitte mit dem $\mathfrak{K}$ bezw. $\mathfrak{K}'$ und den Treffpunkt mit der Geraden $(\Sigma\Sigma')$. Die Kurven C erfüllen nur einen der beiden durch t_1 und t_2 gebildeten Scheitelwinkelabschnitte; es tritt gleichzeitig die Möglichkeit auf, dass ihre Doppelpunkte isoliert sind.

Durch zwei Punkte X und X_1 gehen vier Kurven C; sie entsprechen jenen Geraden von Σ', welchen einen der beiden entsprechenden Punkte des X mit einem des X_1 verbinden. Die Kurven C′ haben die Klasse acht, empfangen aus einem jeden der beiden verbundenen Punkte X′ und X′ acht Tangenten. Diesen 16 Tangenten entsprechen 16 Kurven C, welche durch einen festen Punkt gehen und eine feste Gerade tangieren. Zwei Kurven C′ haben 64 gemeinsame Tangenten, darunter t'_1 und t'_2; es gibt also 62 Kurven C, welche zwei feste Geraden tangieren. *Die Charakteristiken des Systems der Kurven C sind 4, 16, 62.*

Mit einer zweizweideutigen Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ ist in jeder der beiden Ebenen eine zweizweideutige involutorische Verwandtschaft $\mathfrak{T}_2$ bezw. $\mathfrak{T}'_2$ verbunden, welche folgendermassen definiert ist: Zu einem jeden Punkt der einen Ebene gibt es zwei entsprechende in der anderen; sucht man zu diesen wiederum die Paare entsprechender Punkte in der ersten auf, so erhält man den Ausgangspunkt doppelt zurück, die beiden anderen Punkte ordnet man ihm als verbunden zu.

Der Grad der verbundenen Verwandtschaft $\mathfrak{T}'_2$[1]) *ist acht.* Eine Gerade l′ wird durch die $\mathfrak{T}_{2,2}$ in eine Kurve

$$C5\,(\mathfrak{G}3, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, A, B, C)$$

transformiert. Wendet man auf sie abermals die $\mathfrak{T}_{2,2}$ an, so erhält man eine Kurve 25. Ordnung, von der sich jedoch die Hauptkurve des $\mathfrak{G}$ dreimal, die Hauptgeraden der übrigen Hauptpunkte je einmal und die l′ selbst zweimal ablösen, so dass eine Kurve achter Ordnung $\mathfrak{C}'$ als der l′ verbunden zurückbleibt.

Die Punkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, *A, B, C sind einfache Hauptpunkte der* $\mathfrak{T}'_2$. Auf den Kurven C liegen die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, A, B, C zufolge der Schnitte der Geraden l′ mit den sechs von $\mathfrak{G}'$ nach A′, B′, C′, A, B, C gehenden Strahlen, welche zu den unbestimmten entsprechenden der genannten sechs Punkte der Ebene Σ gehören. Daher liegen ihre festen entsprechenden, die oben als Hauptelemente der $\mathfrak{T}'_2$ bezeichneten Punkte, auf der verbundenen Kurve $\mathfrak{C}'$ der Geraden l′.

Ebenso gehören die Punkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, *A′, B′, C′ einfach den verbundenen Kurven* $\mathfrak{C}'$ *an*, weil die C auf ihren Hauptgeraden ausser Hauptelementen noch je einen Schnitt besitzen.

Aus der Auflösung der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ in Doppel-Perspektivitäten in den Punktreihen zugeordneter Strahlen der beiden perspektiven Büschel um $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ folgt, *dass sich die verbundene Verwandtschaft* $\mathfrak{T}'_2$ *in* ∞^1 *einstufige involutorische Beziehungen zwischen den Punkten der Geraden*

[1]) Die $\mathfrak{T}_2$ hat genau dieselben Eigenschaften.

durch $\mathfrak{G}'$ zerlegen lässt. Es seien wiederum S_1 und S_2 neben G die Schnitte der R^3 mit einer Ebene $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$. Läuft ein Punkt X′ auf $\mathfrak{g}'$, so erhält man die eine Reihe verbundener Punkte durch die Folge nachstehender Operationen: Projektion aus S_1, Schnitt mit $\mathfrak{g}$, Projektion aus S_2, Schnitt mit $\mathfrak{g}'$, also durch eine zweimalige perspektive Uebertragung, zunächst von $\mathfrak{g}'$ nach $\mathfrak{g}$, und dann zurück von $\mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{g}'$; die Perspektivitätszentren sind S_1, S_2. Will man die zweite Reihe verbundener Punkte konstruieren, so hat man nur die beiden Perspektivitätsmittelpunkte in ihrer Stellung zu vertauschen. *Zu den verbundenen Punkten eines auf $\mathfrak{g}'$ beweglichen Punktes führt also eine Projektivität, vermittelt durch zweimalige perspektive Uebertragung, und ihre Umkehrung, und dadurch wird die Beziehung involutorisch.* Die drei projektiven Punktreihen, die ein Punkt X′ mit seinen beiden verbundenen beschreibt, haben zwei gemeinsame Koinzidenzen, die Schnittpunkte mit $(\Sigma\Sigma')$ und $\mathfrak{K}$, letzteren eingeschnitten durch die Doppelsekante S_1S_2.

Die der Geraden l′ verbundene Kurve besitzt also auf einem jeden Strahl $\mathfrak{g}'$ allein die beiden dem $(l'\ \mathfrak{g}')$ verbundenen Punkte. Daraus folgt, *dass sechs Punkten der* l′, *d. h. jeder Geraden von Σ' der $\mathfrak{G}'$ verbunden ist; die Verwandtschaft $\mathfrak{T}'_2$ besitzt in ihm einen sechsfachen Hauptpunkt.* Zur Kennzeichnung der verbundenen Kurven diene nunmehr

$$\mathfrak{C}'\,8\ (\mathfrak{G}'\,6,\ \mathfrak{A}',\ \ldots,\ A',\ \ldots,\ A,\ \ldots,\ \mathfrak{A}',\ \ldots).$$

Auf den Geraden t'_1 und t'_2 werden durch die involutorische Beziehung einem Punkte seine beiden Nachbarelemente zugeordnet. Da die einem Punkte in den Verwandtschaften $\mathfrak{T}_{2,2}$ und $\mathfrak{T}'_2$ entsprechenden Paare von gleicher Art sind, d. h. beide entweder aus reellen oder aus konjugiert imaginären Elementen bestehen, *so werden die zwei Geraden t′ auch für die Kurven $\mathfrak{C}'$ Tangenten, und zwar bilden sie die einzigen vom Punkte $\mathfrak{G}'$ ausgehenden; ihre Berührungspunkte sind die Schnitte mit den Geraden* l′.

Die beiden Geraden t'_1 und t'_2 teilen, wenn sie reell vorhanden sind, die Ebene Σ' in zwei Scheitelwinkelpaare. Auf den Strahlen g' des einen Winkels sind die zu einem Punkte X' gehörenden beiden verbundenen durchweg reell, auf denen des anderen Scheitelwinkelpaares durchweg imaginär; sind t'_1 und t'_2 imaginär, so sind die beiden Punkte auf allen Strahlen g' reell. Es sei nun g'_1 ein Strahl, auf welchem sich die beiden dem (g', l') verbundenen Punkte vereinigen, und g'_0 und g'_2 seine beiden Nachbarstrahlen. Da alle drei Geraden in dasselbe Scheitelwinkelpaar fallen, so sind je die beiden Punkte auf den zwei Aussenstrahlen gleichartig, im ersten Falle auf beiden reell oder auf beiden imaginär, im zweiten Falle selbstverständlich reell. Ein solcher Uebergang von reellen und getrennten Punkten durch vereinigte Punkte zu abermals reellen und getrennten Punkten, oder von konjugiert imaginären durch vereinigte zu wiederum konjugiert imaginären weist auf einen Doppelpunkt hin, nicht auf Berührung der Geraden g'_1. Er ist reell oder isoliert, je nachdem die Punkte auf g'_0 und g'_2 reell oder konjugiert imaginär sind[1]).

Dieser Fall liegt zunächst bei den Schnitten der Geraden l' mit $(\Sigma\Sigma')$ und $\mathfrak{K}'$ vor, welche sich mit ihren verbundenen Punkten vereinigen. *Die Kurve $\mathfrak{C}'$ erhält also in den drei Treffpunkten der Geraden l', der sie verbunden ist, mit $(\Sigma\Sigma')$ und dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$ drei veränderliche Doppelpunkte.*

Ferner auf den Geraden $\bar{g}'$ vereinigen sich die zu einem Punkte gehörigen beiden verbundenen in dem gepaarten Punkte der Involution. *Die Kurven $\mathfrak{C}'$ erhalten daher drei weitere Doppelpunkte auf den Geraden $\bar{g}'$.*[2]) Damit haben

[1]) Diese Ueberlegung wird noch wiederholt benutzt werden. Sie beseitigt — passend modifiziert — auch etwaige Zweifel daran, dass die Schnitte der Geraden l' mit $(\Sigma\Sigma')$ und $\mathfrak{K}'$ zu Doppelpunkten der ihr in der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ zugeordneten Kurve C führen.

[2]) Bei den sechs Doppelpunkten ist — Realität der Geraden t' vorausgesetzt — die Möglichkeit isolierten Auftretens vorhanden, nämlich wenn die mit ihnen inzidenten Geraden g' in dem „imaginären" Scheitelwinkel $(t'_1\ t'_2)$ liegen.

sie das Geschlecht Null erreicht. Es bestätigt sich durch Abzählung ihrer Klasse: $8 \cdot 7 - 6 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 14$, dass die Geraden t'_1 und t'_2 neben den in $\mathfrak{G}'$ selbst berührenden die einzigen von diesem Punkte ausgehenden Tangenten bilden.

Der Punkt $\mathfrak{G}'$ besitzt in der Verwandtschaft $\mathfrak{T}'_2$ sechs verbundene Punkte auf jeder Geraden l', d. h. *eine Hauptkurve sechster Ordnung $\mathfrak{V}'$*. Man erhält sie, wenn man die ihm in der $\mathfrak{T}_{2,2}$ zugeordnete Kurve $\mathfrak{H}$ 3 ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, A, B, C) abermals durch diese Verwandtschaft transformiert. Von dem Ort 15. Ordnung, der sich zunächst ergibt, lösen sich, wie obiges Schema zeigt, Hauptbestandteile in der Gesamtordnung 9 ab. *Die zwölf einfachen Hauptpunkte der $\mathfrak{T}'_2$* (S. 31) *gehören einfach auch der $\mathfrak{V}'$ an*, aus den dort angegebenen Gründen. *Der Punkt $\mathfrak{G}'$ selbst hat auf ihr die Vielfachheit 4;* denn auf jedem Strahl $\mathfrak{g}'$ können nur die beiden dem $\mathfrak{G}'$ verbundenen Punkte liegen, und es muss daher vier Strahlen $\mathfrak{g}'$ geben, auf denen dieser Punkt sich selbst verbunden ist. Figur 3 zeigt die Konstruktion der beiden dem $\mathfrak{G}'$ verbundenen Punkte H'_1 und H'_2 auf einer Geraden $\mathfrak{g}'$; S_1 und S_2 sind die Schnitte der Ebene $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ mit der R^3. Damit ein Punkt H' nach $\mathfrak{G}'$ falle, ist erforderlich, dass S_1, S_2, $\mathfrak{G}'$ in gerader Linie liegen; soll er dem $\mathfrak{G}'$ unendlich benachbart sein, so müssen S_1 und S_2 konsekutive Elemente der Raumkurve bilden. Die vier Tangenten in dem vierfachen Punkte $\mathfrak{G}'$ der $\mathfrak{V}'$ werden also eingeschnitten durch die beiden Ebenen (t, t') von g, welche die R^3 tangieren, und diejenige Ebene, welche die Doppelsekante aus $\mathfrak{G}'$ enthält.

Eine der beiden Ebenen (t, t') führt zu zwei Punkten H', welche zu beiden Seiten in unendlicher Nachbarschaft von $\mathfrak{G}'$ liegen. Da nun die Tangente S_1S_2 der R^3 von eigentlichen zu ideellen Doppelsekanten überleitet, so schneiden die beiden Nachbarstrahlen von t' die Kurve ungleichartig (Fig. 4), der eine zweimal reell, der andere imaginär. *Die beiden Geraden t' werden also Wendetangenten der Kurve $\mathfrak{V}'$; ihre Berührungspunkte sind in $\mathfrak{G}'$ über einander gelagert.*

Die Ebene durch g, welche die von $\mathfrak{G}'$ kommende Doppelsekante d der R^3 enthält, hat zwei Nachbarebenen, welche gleichartig schneiden, da die mit ihnen inzidenten Doppelsekanten beide eigentlich oder beide ideell sind. Daher sind auch auf ihnen die Punktepaare H′ gleichartig, beide reell oder beide imaginär. Dies weist auf *Selbstberührung der beiden Aeste* hin[1]). *Die gemeinsame Tangente berührt in* $\mathfrak{G}'$ *zugleich den Kegelschnitt* $\mathfrak{K}'$, denn die Ebene (g, d) berührt die Regelschar der die g treffenden Doppelsekanten, deren Spur in Σ' die Kurve $\mathfrak{K}'$ ist, im Punkte (g, d) $= \mathfrak{G}'$. Infolge dieser Selbstberührung ist die Zahl der Doppelpunkte, denen der vierfache Punkt $\mathfrak{G}'$ äquivalent zu rechnen ist, um 1 auf 7 zu erhöhen. *Auf den Geraden* $\mathfrak{g}$ *liegen drei weitere Doppelpunkte der Kurve* $\mathfrak{V}'$. Damit erreicht sie das Geschlecht Null. Als Klasse scheint sich 10 zu ergeben. Zur schematischen Kennzeichnung der verbundenen Kurve des $\mathfrak{G}'$ diene

$$\mathfrak{V}'\ 6\ (\mathfrak{G}'\ 4,\ \mathfrak{A}',\ .\ .\ A',\ .\ .\ A,\ .\ .,\ \bar{\mathfrak{A}}',\ .\ .).$$

Auf den sechs Strahlen von $\mathfrak{G}'$ *nach A, B, C, A′, B′, C′ arten die beiden Projektivitäten, die durch einen die Gerade durchlaufenden Punkt und seine beiden verbundenen hervorgerufen werden, aus.* Auf $\mathfrak{G}'\mathfrak{A}'A$ sind einem beliebigen Punkte die beiden $\mathfrak{A}'$ und A verbunden; der $\mathfrak{A}'$ ist sich selbst verbunden, sein zweiter verbundener Punkt ist auf der Geraden $\mathfrak{G}'\mathfrak{A}'A$ unbestimmt geworden. Dasselbe gilt von A. *Ein jeder der zwölf einfachen Hauptpunkte der* $\mathfrak{T}'_2$ *ist sich selbst verbunden, der zweite ihm verbundene Punkt ist auf seiner Verbindungsgeraden mit* $\mathfrak{G}'$ *unbestimmt geworden.* Es ist in dem Verhalten des sechsfachen und der einfachen Hauptpunkte derselbe Unterschied wie bei der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ festzustellen.

2.

Eine ähnliche Verwandtschaft lässt sich herstellen, wenn man die Raumkurve dritter durch eine solche vierter Ord-

[1]) Allein die Spurgerade der Ebene (g, d) ist Tangente im Punkte $\mathfrak{G}'$!

nung ersetzt. Hier werden wir jedoch zu zwei wesentlich verschiedenen Verwandtschaften geführt, da es zwei Raumkurven vierter Ordnung gibt, die man als erster und zweiter Art, R^4_I und R^4_{II}, unterscheidet. Für unsere Zwecke reicht es aus zu wissen, dass die R^4_I zwei scheinbare Doppelpunkte und den Rang acht, die R^4_{II} drei scheinbare Doppelpunkte und den Rang sechs besitzt[1]).

Wird eine Raumkurve vierter Ordnung erster Art R^4_1 *von einer Geraden* g *zweimal*, in G_1 und G_2, *getroffen, so entsteht durch Zuordnung der Spuren der* $\mathfrak{T}$*-Strahlen in den Punktfeldern der beiden Ebenen* Σ *und* Σ' *eine zweizweideutige Verwandtschaft* $\mathfrak{T}_{2,2}$. Von den vier gemeinsamen Sekanten der R^4_I und der g, die von einem jeden Punkte eines der beiden Felder ausgehen, sind die nach G_1 und G_2 gelegten nicht als $\mathfrak{T}$-Strahlen zu rechnen; die beiden übrigen schneiden in die andere Ebene die zwei entsprechenden Punkte ein.

Zwei Geraden, l in Σ und l′ in Σ', bestimmen sechs gemeinsame $\mathfrak{T}$-Strahlen, da die acht Geraden der Regelschar [l l′ g], welche der R^4_I begegnen, auch die durch G_1 und G_2 gehenden Erzeugenden umfassen. *Die Verwandtschaft ist also sechsten Grades.*

Was die Benennung der Hauptpunkte anlangt, so halten wir an den im vorigen Abschnitt zum Ausdruck kommenden Prinzip fest; die Schnitte der Raumkurve mit den beiden Feldern Σ und Σ' werden durch deutsche Buchstaben, die Spuren ihrer Projektionen aus $\mathfrak{G}$ bezw. $\mathfrak{G}'$ in der anderen Ebene mit den gleichen lateinischen Zeichen benannt. E bedeuten also: $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ die Spuren der g in Σ und Σ', $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{A}'$, . . $\mathfrak{D}'$ die Schnitte der R^4_I mit diesen

[1]) Die beiden Raumkurven werden später genauer behandelt werden. Literatur: Cremona, Intorno alla curva gobba del quart'ordine, per la quale passa una sola superficie di secondo grado; Annali di Matematica, (Ser. I) IV. S. 71. — Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Kap. II und V. — Schroeter, Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Species.

Ebenen, A, B, C, D die Projektionen von $\mathfrak{A}', .. \mathfrak{D}'$ aus $\mathfrak{G}'$ in Σ, A'..D' diejenigen von $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{A}, .. \mathfrak{D}$) in Σ', jene wie diese auf ($\Sigma\Sigma'$) gelegen. *Demnach entspricht dem* $\mathfrak{A}$ *neben dem Punkte* $\mathfrak{A}'$, der Spur der einzigen[1]) durch $\mathfrak{A}$ gehenden Doppelsekante der R_I^4, welche die g trifft, *die ganze Punktreihe der durch ihn gehenden Geraden* $\mathfrak{G}'A'$, *und ebenso gehören den Punkten* $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ *die* $\bar{\mathfrak{B}}'$, $\bar{\mathfrak{C}}'$, $\bar{\mathfrak{D}}'$, welche auf gleiche Weise wie $\bar{\mathfrak{A}}'$ zustande kommen, *und die mit diesen inzidenten Geraden* $\mathfrak{G}'B'$, $\mathfrak{G}'C'$, $\mathfrak{G}'D'$ *als entsprechend zu. Durch einen jeden der vier Punkte* A,..D *gehen zwei* $\mathfrak{T}$*-Strahlen. Einer davon ist seine Verbindungsgerade mit* $\mathfrak{G}'$, *deren Schnitt mit der Ebene* Σ' *unbestimmt ist; daneben sind die genannten Punkte sich selbst entsprechend.*

Aus $\mathfrak{G}$ wird die R_I^4 durch einen Kegel vierter Ordnung projiziert, dessen sämtliche Kanten $\mathfrak{T}$-Strahlen sind. *Die Spur dieses Kegels in* Σ', *eine Kurve vierter Ordnung* $\mathfrak{H}'$, *welche doppelt durch* $\mathfrak{G}'$, *einfach je durch* $\mathfrak{A}', .. \mathfrak{D}'$, A',..D' *geht und noch einen zweiten Doppelpunkt besitzt, ist von den dem* $\mathfrak{G}$ *entsprechenden Punkten erfüllt, also*

$$\mathfrak{H}'\ 4\ (\mathfrak{G}'\ 2, \mathfrak{A}', .., A'..).$$

Ihr Geschlecht ist **1**, ihre Klasse acht, sodass also von dem Doppelpunkt $\mathfrak{G}'$ noch vier anderwärts berührende Tangenten ausgehen.

Zwischen dem Verhalten des $\mathfrak{G}$ und der einfachen Hauptpunkte beobachtet man den bereits im vorigen Abschnitt festgestellten Unterschied.

Die einer Geraden l' *von* Σ' *entsprechende Kurve sechster Ordnung* C *geht viermal durch* $\mathfrak{G}$, *einmal je durch* $\mathfrak{A}, .. \mathfrak{D}$, A,..D:

$$C\ 6\ (\mathfrak{G}\ 4, \mathfrak{A}, .., A, ..).$$

Die Doppelsekanten der R_I^4 bilden eine Kongruenz zweiter Ordnung sechster Klasse; die sechs in einer Ebene liegenden verbinden je zwei ihrer vier Schnittpunkte mit der Raumkurve. Eine beliebige Gerade des Raumes, die ja ein

[1]) Ausser $\mathfrak{A}G_1$ und $\mathfrak{A}G_2$.

Strahlengebüsch, einen speziellen Komplex ersten Grades, bestimmt, scheidet aus dieser Kongruenz eine Regelfläche achter Ordnung aus[1]); sie setzt sich bei der Geraden g aus den beiden abzusondernden Kegeln dritter Ordnung, welche die R_1^4 aus G_1 und G_2 projizieren, und aus einer Regelschar zusammen. Die Spuren der letzteren in den beiden Ebenen sind Kegelschnitte, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$; der in Σ' gelegene $\mathfrak{K}'$ geht durch $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{A}', .. \mathfrak{D}'$, $\bar{\mathfrak{A}}', .. \bar{\mathfrak{D}}'$ und den zweiten Doppelpunkt der Hauptkurve des $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{K}' \; 2\,(\mathfrak{G}', \mathfrak{A}', .., \bar{\mathfrak{A}}', ..).$$

Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{K}'$, *welche durch die Geraden der Regelschar in eindeutige Punktbeziehung gebracht werden, sind der Ort jener Punkte, deren entsprechende sich vereinigen, und zugleich Ort koinzidierender verbundener Punkte. Die gleiche Eigenschaft weisen die Punkte der Geraden* $(\Sigma\Sigma')$ *auf.* Ein jeder von ihnen vereinigt sich mit seinen beiden entsprechenden. *Die Kurven* C *erhalten also drei Doppelpunkte, zwei auf* $\mathfrak{K}$ *und einen auf* $(\Sigma\Sigma')$. *Damit haben sie das Geschlecht 1* und die Klasse zwölf *erreicht.*

In derselben Weise wie die vorige lösen wir auch die jetzige Verwandtschaft in Doppel-Perspektivitäten auf den sich schneidenden Strahlen g *und* g′ *der Büschel um* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}'$ *auf.* Bewegt sich ein Punkt X′ auf g′, so beschreiben seine beiden entsprechenden X und X perspektive Punktreihen auf g; die beiden Koinzidenzen sind die Schnitte mit $(\Sigma\Sigma')$ und mit $\mathfrak{K}$ ausserhalb von $\mathfrak{G}$. *Auf den acht in* A,..D, A′,..D′ *sich durchschneidenden Strahlenpaaren der beiden Büschel artet eine der beiden Projektivitäten aus: singuläre Elemente sind die einfachen Hauptpunkte.* Nach derselben Methode wie im vorigen Abschnitt (S. 29), mit Hilfe zweier involutorischer Korrespondenzen im Ebenenbüschel $(\Sigma\Sigma')$ beweist man das Vorhandensein von *vier Geradenpaaren* $\bar{\mathfrak{g}}$, $\bar{\mathfrak{g}}'$, *auf denen durch die* $\mathfrak{T}_{1,2}$ *eine Projektivität zweier Involutionen hervorgerufen wird.*

[1]) Sturm, Liniengeometrie I, S. 43.

Da die R_1^4 den Rang acht besitzt, so gibt es vier Ebenen durch g, welche eine ausserhalb dieser Geraden berührende Tangente der Raumkurve aufnehmen; ihre Spuren in Σ seien t, in Σ' t'. Einem Punkte der einen von zwei solchen Geraden entsprechen zwei unendlich nahe Punkte auf der anderen. Ausserdem trennen die Strahlen t und t' Punkte mit reellen entsprechenden von solchen mit imaginären entsprechenden Elementen [1]). *Daraus folgt, dass die Kurven* C *von den vier Geraden* t *tangiert werden.* Damit sind alle zwölf vom Punkte $\mathfrak{G}$ ausgehenden Tangenten gewonnen. *Alle Kurven* C *haben dieselben vier vom Punkte* $\mathfrak{G}$ *ausgehenden anderwärts berührenden Tangenten.*

Ebenso tangieren die Geraden t *bezw.* t' *die Hauptkurven der Punkte* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}'$ *und sind die sämtlichen von diesen Punkten ausgehenden Tangenten*; das ersieht man am besten, wenn man sich den Beweis des Satzes vergegenwärtigt, dass die Klasse des Projektionskegels einer Raumkurve gleich ihrem Rang ist.

Zwei Kurven C haben zwölf nicht in Hauptpunkte fallende Schnitte; zwei davon entsprechen dem Begegnungspunkt der Geraden, aus denen sie durch die Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ hervorgehen. Daraus ist zu schliessen, dass *die verbundene involutorische Verwandtschaft* $\mathfrak{T}'_2$ *vom Grade zehn ist. Auf der der* l' *verbundenen Kurve* $\mathfrak{C}'$ *liegen die Punkte* A,..D, $\mathfrak{A}'$,..$\mathfrak{D}'$ *einfach;* sie entsprechen den einfachen Hauptpunkten der Kurve C, in welche die l' durch die $\mathfrak{T}_{2,2}$ transformiert wird, neben den sich absondernden Hauptgeraden. *Ebenso liegen die Punkte* $\mathfrak{A}'$,..$\mathfrak{D}'$, A',..D' *einfach auf den* $\mathfrak{C}'$, da auf jedem der acht Strahlen $\mathfrak{G}$ (A,..D, $\mathfrak{A}$,..$\mathfrak{D}$), ihren Hauptgeraden in der $\mathfrak{T}_{2,2}$ ein nicht in Hauptelemente fallender Schnitt mit der C liegt.

Eine jede Gerade g trifft die C noch zweimal; nur diese beiden Schnitte können, da ja die Hauptkurve des $\mathfrak{G}$ sich absondert, zu Punkten der verbundenen $\mathfrak{C}'$, welche auf der

[1]) Die Ueberlegung auf S. 33 stützt nun den Schluss, dass die Schnitte (l', $\mathfrak{R}'$) und (l', $\Sigma\Sigma'$) zu Doppelpunkten der C führen.

korrespondierenden $\mathfrak{g}'$ liegen, führen. Die übrigen acht vereinigen sich in $\mathfrak{S}'$, d. h. *dieser Punkt wird achtfacher Hauptpunkt der Verwandtschaft* $\mathfrak{T}'_2$. Damit gewinnen wir zur Kennzeichnung der verbundenen Kurven

$$\mathfrak{C}' \; 10 \; (\mathfrak{S}' \; 8, \mathfrak{A}', \ldots, A', \ldots, A, \ldots, \mathfrak{A}', \ldots).$$

Die involutorische Verwandtschaft lässt sich, wie im vorigen Abschnitt in ∞^1 *involutorische Beziehungen auf den Strahlen des Büschels um* $\mathfrak{S}'$ *zerlegen.* Durchläuft X' eine Gerade $\mathfrak{g}'$, so bewegen sich seine beiden verbundenen Punkte projektiv zu ihm; die drei projektiven Reihen haben zwei gemeinsame Koinzidenzen, die Schnitte mit $(\Sigma\Sigma')$ und $\mathfrak{K}'$.

Auf den acht Geraden des Büschels nach $A, \ldots D$, $A', \ldots D'$ *arten die beiden Projektivitäten aus; singuläre Elemente sind die einfachen Hauptpunkte der* $\mathfrak{T}'_2$. Damit haben wir zugleich für diese die verbundenen Gebilde festgestellt.

Auf jeder der vier Geraden t' sind einem Punkte seine beiden Nachbarelemente verbunden. Gleichzeitig tritt längs dieser Strahlen der S. 33 geschilderte Wechsel in der Art des Entsprechens ein. *Daher tangieren die vier Geraden* t' *in ihren Schnitten mit der* l' *die dieser Geraden verbundene Kurve* $\mathfrak{C}'$ *und bilden neben den in* $\mathfrak{S}'$ *selbst berührenden ihre sämtlichen von diesem Punkte ausgehenden Tangenten. Die Kurve* $\mathfrak{C}'$ *erhält drei Doppelpunkte*[1]*, einen auf* $(\Sigma\,\Sigma')$ *und zwei auf* $\mathfrak{K}'$, *in den Treffpunkten mit der* l'. *Auf den vier Geraden* $\mathfrak{g}'$ *vereinigen sich die beiden verbundenen Punkte, sodass auf jeder von ihnen ein weiterer Doppelpunkt der* $\mathfrak{C}'$ *entsteht. Damit erreichten diese Kurven das Geschlecht* **1** und die Klasse 20; die von $\mathfrak{S}'$ ausgehenden Tangenten sind neben den acht in ihm berührenden, welche doppelt gerechnet werden müssen, die vier Geraden t'. Es bestätigt sich, dass alle Kurven $\mathfrak{C}'$ dieselben vier von $\mathfrak{S}'$ ausgehenden, anderwärts berührenden Tangenten haben.

Es bleibt nun noch *die verbundene Kurve des Punktes* $\mathfrak{S}'$ zu untersuchen. *Ihre Ordnung ist acht;* man gelangt zu ihr, wenn man auf die Hauptkurve des $\mathfrak{S}'$ abermals die $\mathfrak{T}_{2,2}$

[1]) siehe S. 33.

anwendet. Hierbei erkennt man, dass *sie einfach durch die sechzehn einfachen Hauptpunkte der* $\mathfrak{T}'_2$ *und sechsmal durch* $\mathfrak{G}'$ *geht.* Auf den vier Geradeu $\mathfrak{t}'$ sind dem $\mathfrak{G}'$ seine beiden Nachbarpunkte verbunden; *in dem sechsfachen Punkte* $\mathfrak{G}'$ *lagern sich also vier Wendepunkte über einander, die zugehörigen Wendetangenten sind die Strahlen* $\mathfrak{t}'$. Auf der Spur jener Ebene, welche die durch $\mathfrak{G}'$ gehende Doppelsekante der R^4_{I} aufnimmt, ergibt sich allein der doppelt zu rechnende Punkt $\mathfrak{G}'$. Dieselbe Ueberlegung wie im ersten Abschnitt lehrt, dass *diese Gerade, welche zugleich den* $\mathfrak{K}'$ *tangiert, die beiden noch fehlenden Aeste der Kurve berührt.* Daher ist der Punkt $\mathfrak{G}'$ mit sechzehn Doppelpunkten äquivalent zu rechnen. *Auf den vier Geraden* $\bar{\mathfrak{g}}'$ *vereinigen sich die beiden dem* $\mathfrak{G}'$ *verbundenen Punkte, sodass vier weitere Doppelpunkte entstehen. Damit erhält auch diese Kurve das Geschlecht 1.* Ihre Klasse ist wahrscheinlich sechzehn.

3.

Von den Eigenschaften dieser Verwandtschaft sind einzelne unabhängig davon, dass die zugrunde gelegte Raumkurve vierter Ordnung erster Art ist; sie gelten daher ebenso für *die mit Hilfe der Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art* R^4_{II} *und einer Doppelsekante* g *hergestellte Verwandtschaft. Auch sie ist zweizweideutig und vom Grade sechs.* Ungeändert bleibt ferner, dass *den Punkten* $\mathfrak{A}$, . . $\mathfrak{D}$, A, . . D *die einzelnen Punkte* $\bar{\mathfrak{A}}'$ . . $\bar{\mathfrak{D}}'$, A, . . D *und daneben die Punktreihen der Geraden aus* $\mathfrak{G}'$ *nach* A′, . . D′, A, . . D *entsprechen. Dem Punkte* $\mathfrak{G}$ *entspricht wieder eine Kurve vierter Ordnung,*

$$\mathfrak{H}' \; 4 \; (\mathfrak{G}' \; 2, \; \mathfrak{A}', \; . \; ., \; A', \; . \; .),$$

die aber nun ausserhalb von $\mathfrak{G}'$ *noch zwei Doppelpunkte besitzt. Damit sinkt ihr Geschlecht auf Null,* ihre Klasse auf sechs. *Die den Geraden von* Σ' *entsprechenden Kurven* C *gehen viermal durch* $\mathfrak{G}$, *einfach je durch* $\mathfrak{A}$, . . $\mathfrak{D}$, A, . . D:

$$C \; 6 \; (\mathfrak{G} \; 4, \; \mathfrak{A}, \; . \; ., \; A, \; . \; .).$$

Da die Kongruenz der Doppelsekanten der R^4_{II} die Ordnung drei und die Klasse sechs hat, so erfüllen die-

jenigen Doppelsekanten, welche eine beliebige Gerade des Raumes treffen, eine Regelfläche neunter Ordnung. Für die Gerade g erniedrigt sich diese Ordnungszahl durch Absonderung der beiden Kegel dritter Ordnung, welche die Raumkurve aus G_1 und G_2 projizieren, auf drei. Die Spuren dieser reduzierten Regelfläche in Σ und Σ' sind Kurven dritter Ordnung, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$; die in Σ' liegende $\mathfrak{K}'$ geht zweimal durch $\mathfrak{G}'$ — durch diesen Punkt lassen sich ausser der g noch zwei Doppelsekanten legen —, einfach je durch $\mathfrak{A}'$, . . $\mathfrak{D}'$, $\bar{\mathfrak{A}}'$, . . $\bar{\mathfrak{D}}'$ und die beiden Doppelpunkte der Hauptkurve des $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{K}' \; 3\,(\mathfrak{G}'\; 2,\; \mathfrak{A}',\; .\; .\; \mathfrak{A}',\; .\; .).$$

Auf jedem Strahl durch $\mathfrak{G}'$ liegt also nur noch ein Punkt derselben. *Die Punkte der beiden Kurven* $\mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{K}'$ *werden durch die Erzeugenden der Regelfläche in eindeutige Beziehung gebracht; einem Punkte der einen entspricht in der Verwandtschaft* $\mathfrak{T}_{2,2}$ *der zugeordnete der anderen doppelt. Die gleiche Eigenschaft zeigen die Punkte der Geraden* $(\Sigma\Sigma')$; jeder vereinigt sich mit seinen beiden entsprechenden. *Die der Geraden* l′ *entsprechende Kurve* C *erhält demnach vier Doppelpunkte, einen auf* $(\Sigma\Sigma')$ *und drei auf* $\mathfrak{K}$; sie entsprechen den Schnitten der l′ mit der Ebene Σ und der $\mathfrak{K}'$. *Auf diese Weise ergibt sich für die Kurven* C *das Geschlecht Null*; sie können also, ohne zu zerfallen, weitere vielfache Punkte nicht erhalten. Ihre Klasse ist zehn.

In bekannter Weise basieren wir die Verwandtschaft auf die perspektive Lage der Büschel um $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$: zwei hierin zugeordnete Strahlen g und g′ tragen die bekannte Doppel-Perspektivität entsprechender Punkte. Mit einem Punkte X′ von g′ bewegen sich seine beiden entsprechenden X und $\bar{X}$ auf g perspektiv. Koinzidenzen der auf g entstehenden konjektiven Reihen sind die Schnitte mit $(\Sigma\Sigma')$ und $\mathfrak{K}$ ausserhalb von $\mathfrak{G}$.

Unter den Strahlenpaaren g, g′ heben wir wieder die in A, . . D, A′, . . D′ sich durchschneidenden hervor. Auf ihnen artet eine der beiden Projektivitäten aus; singuläre Elemente sind die einfachen Hauptpunkte. Es ergeben sich

ferner wieder vier Geradenpaare $\overline{\mathfrak{g}}$, $\overline{\mathfrak{g}}'$, auf denen die Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ eine Projektivität zweier Involutionen hervorruft.

Da die R^4_{II} sechsten Ranges ist, so gibt es zwei Ebenen durch g, welche eine ausserhalb dieser Geraden berührende Tangente aufnehmen: ihre Spuren in Σ und Σ' seien die beiden Geradenpaare t, t'. Auf ihnen besteht die zweizweideutige Punktkorrespondenz darin, dass einem Punkte der einen zwei konsekutive Elemente der anderen zugeordnet werden. *Die beiden Geraden* t *tangieren die Kurven* C und bilden, da wir zehn als ihre Klasse ermittelt haben, neben den in $\mathfrak{G}$ selbst berührenden die sämtlichen Tangenten aus diesem Punkte. *Alle Kurven* C *haben dieselben zwei von* $\mathfrak{G}$ *ausgehenden, anderwärts berührenden Tangenten.*

Ebenso tangieren die Ebenen (t, t') *die Hauptkurven der Punkte* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}'$.

Der Grad der verbundenen Verwandtschaft $\mathfrak{T}'_2$ *bleibt zehn. Auf der der Geraden* l' *verbundenen Kurve* $\mathfrak{C}'$ *liegen einfach die sechzehn Punkte* A, . . D, A', . . D', $\mathfrak{A}'$, . . $\mathfrak{D}'$, $\overline{\mathfrak{A}}'$, . . $\overline{\mathfrak{D}}'$. *Der Punkt* $\mathfrak{G}'$ *wird wieder achtfacher Hauptpunkt.* Daher können wir zur Kennzeichnung der verbundenen Kurven das Schema

$$\mathfrak{C}'\ 8\ (\mathfrak{G}'\ 6,\ \mathfrak{A}',\ .\ .\ A',\ .\ .\ A,\ .\ .\ \overline{\mathfrak{A}}',\ .\ .)$$

benützen.

Die Verwandtschaft $\mathfrak{T}'_2$ *lässt sich in* ∞^1 *Korrespondenzen auf den Strahlen des Büschels um* $\mathfrak{G}'$ *zerlegen, welche je aus einer Projektivität und ihrer Umkehrung* (siehe S. 31) *sich zusammensetzen und dadurch involutorisch werden.* Ein Punkt X' einer Geraden $\mathfrak{g}'$ bewegt sich also mit seinen beiden verbundenen projektiv: gemeinsame Koinzidenzen sind wiederum die Schnitte mit ($\Sigma\Sigma'$) und $\mathfrak{K}'$ ausserhalb von $\mathfrak{G}'$. Daraus zeigt sich, dass *die Kurve* $\mathfrak{C}'$ *vier Doppelpunkte auf der Geraden* l' *erhält, einen in* (l', Σ), *die drei anderen in den Schnitten mit* $\mathfrak{K}'$.

Auf den vier Geraden $\overline{\mathfrak{g}}'$ *vereinigen sich die beiden verbundenen Punkte; daraus entstehen vier weitere Doppelpunkte*

der $\mathfrak{C}'$. *Auch diese Kurven erweisen sich als unikursal*; ihre Klasse ist achtzehn. Von dem achtfachen Punkte $\mathfrak{G}'$ gehen mithin noch zwei ausserhalb berührende Tangenten aus; es sind die beiden Geraden $\mathfrak{t}'$, auf denen einem Punkte seine beiden Nachbarelemente als verbunden zugehören. *Alle Kurven* $\mathfrak{C}'$ *besitzen in den beiden Geraden* $\mathfrak{t}'$ *dieselben von* $\mathfrak{G}'$ *ausgehenden, anderwärts berührenden Tangenten;* ihre Berührungspunkte liegen auf der Geraden $\mathfrak{l}'$, aus der durch die Verwandtschaft $\mathfrak{T}'_2$ die $\mathfrak{C}'$ hervorgeht.

Auf den Geraden von $\mathfrak{G}'$ nach A, . . D, A′, . . D′ arten die beiden durch die $\mathfrak{T}'_2$ hervorgerufenen Projektivitäten aus; singuläre Elemente sind wieder die einfachen Hauptpunkte der Verwandtschaft. Damit haben wir zugleich für diese die verbundenen Gebilde.

Da der Punkt $\mathfrak{G}'$ *achtfacher Hauptpunkt der* $\mathfrak{T}'_2$ *ist, so muss ihm eine Kurve achter Ordnung verbunden sein.* Sie geht einfach durch die einfachen Hauptpunkte der $\mathfrak{T}'_2$ und sechsmal durch $\mathfrak{G}'$ selbst. In diesem Punkte besitzt sie zwei Wendepunkte, deren Tangenten die Geraden $\mathfrak{t}'$ sind. Da nun von $\mathfrak{G}'$ zwei Doppelsekanten der R^4_{II} ausgehen, so entstehen auch zwei Paare im Punkte $\mathfrak{G}'$ sich berührender Aeste; die zugehörigen gemeinsamen Tangenten sind die Doppelpunktstangenten der Kurve $\mathfrak{K}'$. Die Zahl der Doppelpunkte, denen der $\mathfrak{G}'$ äquivalent ist, muss also um zwei auf 17 erhöht werden. Auf den vier Strahlen $\bar{\mathfrak{g}}'$ erhält seine verbundene Kurve weitere vier Doppelpunkte. *Damit erreicht sie das Geschlecht Null*: als Klassenzahl ist 14 anzunehmen.

Die beiden durch $\mathfrak{T}$-Strahlen hergestellten zweizweideutigen Verwandtschaften sechsten Grades unterscheiden sich also dadurch, dass bei der ersten, der die R^4_I zugrunde gelegt ist, die sämtlichen auftretenden Kurven das Geschlecht 1 haben, während sie bei der anderen, deren Basis die Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art ist, unikursal sind. Wir können daher die beiden Verwandtschaften als $\mathfrak{T}_{2,2}$ sechsten Grades vom Geschlecht 1 bezw. Null charakterisieren.

Kapitel III.

Dreidreideutige Verwandtschaften, welche auf dieselbe Art hergestellt sind.

1.

Liegt eine Raumkurve dritter Ordnung R^3 *und eine gegen sie windschiefe Gerade* g *vor, so entsteht durch Zuordnung der Spuren der* $\mathfrak{T}$*-Strahlen in den Punktfeldern* Σ *und* Σ' *eine dreidreideutige Verwandtschaft* $\mathfrak{T}_{3;3}$, da nunmehr die drei von einem beliebigen Punkte des Raumes ausgehenden gemeinsamen Sekanten der R^3 und g durchweg $\mathfrak{T}$-Strahlen sind. Solche sind auch die sämtlichen sechs Erzeugenden der Regelschar [ll'g], welche der R^3 begegnen. *Die Verwandtschaft ist also sechsten Grades.* Einer Geraden der einen oder anderen Ebene entspricht eine Kurve sechster Ordnung, C bezw. C', welche von den drei dem beweglichen Punkte der Geraden entsprechenden Punkten durchlaufen wird.

Es bedeuten wie im vorigen Kapitel: $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ die Spuren von g in Σ und Σ', $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ die Schnitte der R^3 mit diesen Ebenen, A, B, C die Spuren der Projektionen $\mathfrak{G}'$ ($\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$) in Σ, A', B', C' diejenigen von $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$) in Σ'.

Die sämtlichen Kanten des Kegels, welcher die R^3 aus $\mathfrak{G}$ projiziert, sind $\mathfrak{T}$-Strahlen. *Dem* $\mathfrak{G}$ *entspricht in der Ebene* Σ' die Spur dieses Kegels, *eine Kurve dritter Ordnung*

$$\mathfrak{H}' \; 3 \; (\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}', A', B', C'),$$

welche einen Doppelpunkt besitzt. Ihr Geschlecht ist Null, ihre Klasse vier. Die vom Punkte $\mathfrak{A}$ ausgehenden $\mathfrak{T}$-Strahlen erfüllen den Büschel ($\mathfrak{A}$, g); daher ist diesem Punkte die Gerade $\mathfrak{G}'$ A' zuzuordnen. Unter ihren Punkten befinden sich die Spuren $\overline{\mathfrak{A}}'_1$ und $\overline{\mathfrak{A}}'_2$ der beiden durch $\mathfrak{A}$ gehenden Doppelsekanten der R^3, welche der g begegnen, und es zeigt sich, dass *dem* $\mathfrak{A}$ *die beiden festen Punkte* $\overline{\mathfrak{A}}'_1$ *und* $\overline{\mathfrak{A}}'_2$ *entsprechen, während der dritte auf der durch beide gehenden Geraden* $\mathfrak{G}'$A' *unbestimmt geworden ist.* Ebenso haben $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ nur zwei feste entsprechende Punkte, $\overline{\mathfrak{B}}'_1$, $\overline{\mathfrak{B}}'_2$ und

$\overline{\mathfrak{C}}'_1$, $\overline{\mathfrak{C}}'_2$ die auf ähnliche Weise wie $\overline{\mathfrak{A}}'_1$ und $\overline{\mathfrak{A}}'_2$ zustande kommen; die dritten ihnen entsprechenden Punkte sind auf den Geraden $\mathfrak{G}'B'$ und $\mathfrak{G}'C'$ unbestimmt geworden. Durch den Punkt A gehen drei $\mathfrak{T}$-Strahlen; einer davon ist die Gerade $\mathfrak{G}'\mathfrak{A}'$, die beiden anderen fallen nicht in die Ebene Σ' hinein. *Daher ist der Punkt* A *doppelt sich selbst entsprechend; sein dritter entsprechender Punkt breitet sich auf der Geraden* $\mathfrak{G}'\mathfrak{A}'$A *aus.* Gleicher Weise sind die Punkte B und C doppelt sich selbst entsprechend; daneben gehören ihnen noch die Geraden $\mathfrak{G}'\mathfrak{B}'$B und $\mathfrak{G}'\mathfrak{C}'$C als entsprechend zu. Es ist hierbei derselbe Unterschied wie bei den im vorigen Kapitel behandelten Verwandtschaften festzustellen; die dem dreifachen Hauptpunkte $\mathfrak{G}$ entsprechenden Punkte sind sämtlich unbestimmt geworden und breiten sich über dieselbe Kurve aus; den einfachen Hauptelementen hingegen entsprechen zwei feste Punkte, nur der dritte ist unbestimmt geworden.

Damit sind zwölf lineare Bedingungen für die den Geraden von Σ' *entsprechenden Kurven* C *gewonnen; sie gehen sämtlich dreimal durch* $\mathfrak{G}$, *einfach je durch* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, A, B, C, also

$$C\,6\,(\mathfrak{G}\,3, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, A, B, C).$$

Die Zahl der linearen Bedingungen ist dieselbe wie bei der entsprechenden zweizweideutigen Verwandtschaft.

Durch einen jeden Punkt der Geraden $(\Sigma\Sigma')$ gehen drei $\mathfrak{T}$-Strahlen; da sie im allgemeinen in keine der beiden Ebenen hineinfallen, so ergibt es sich, dass ein jeder Punkt dieser Geraden sich mit seinen drei entsprechenden vereinigt. Die Doppelsekanten der R^3, welche die Gerade g treffen, bilden eine Regelfläche vierten Grades [1]). Ihre Spuren in den beiden Ebenen sind Kurven vierter Ordnung, $\mathfrak{K}$ in Σ und $\mathfrak{K}'$ in Σ'; ihre Punktreihen sind durch die Erzeugenden der Regelfläche in eindeutige Beziehung gebracht. Die Kurve $\mathfrak{K}'$ geht doppelt durch die Punkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ — sie bestimmen zwei die g treffende Doppelsekanten —, einfach

[1]) Sturm, Geom. Verw. I, S. 312.

durch $\mathfrak{A}'_1, .. \mathfrak{C}'_2$, $\mathfrak{G}'$ und den Doppelpunkt der Hauptkurve des $\mathfrak{G}$, also

$$\mathfrak{K}' \; 4 \; (\mathfrak{A}' \; 2, \; \mathfrak{B}' \; 2, \; \mathfrak{C}' \; 2, \; \overline{\mathfrak{A}}'_1, .. \overline{\mathfrak{C}}'_2, \; \mathfrak{G}').$$

Auch die Kurven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ sind unikursal. Einem jeden Punkt der einen von ihnen entspricht in der $\mathfrak{T}_{3,3}$ der zugeordnete der anderen doppelt sowie ein dritter Punkt. Deren Ort ist eine Kurve siebenter Ordnung. Die $\mathfrak{K}'$ geht durch Anwendung der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{3,8}$ in eine Kurve 24. Ordnung über, von der sich indessen Hauptkurven in der Gesamtordnung neun ablösen; da zu der Restkurve 15. Ordnung doppelt die $\mathfrak{K}$ gehört, so bleibt in der Tat eine Kurve siebenter Ordnung, K, als Ort der dritten Punkte zurück. Sie geht viermal durch $\mathfrak{G}$ — es gibt vier einfache, nicht in Hauptpunkte fallende Schnitte der Hauptkurve dieses Punktes mit der $\mathfrak{K}'$ —, einmal je durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\overline{\mathfrak{A}}_1, .. \overline{\mathfrak{C}}_2$; ihre sieben Schnitte auf der Geraden $(\Sigma\Sigma')$ sind A, B, C und die vier Schnitte derselben mit $\mathfrak{K}$. Zur Kennzeichnung der Kurve K diene

$$\mathrm{K} \; 7 \; (\mathfrak{G} \; 4, \; \mathfrak{A}, \; \mathfrak{B}, \; \mathfrak{C}, \; \overline{\mathfrak{A}}_1, .. \mathfrak{C}_2, \; \mathrm{A}, \; \mathrm{B}, \; \mathrm{C}).$$

Damit haben wir zwanzig Schnitte der Kurven $\mathfrak{K}$ und K; vier von ihnen repräsentiert $\mathfrak{G}$, je zwei die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, sechs weitere liefern $\overline{\mathfrak{A}}_1, .. \overline{\mathfrak{C}}_2$, und vier liegen auf $(\Sigma\Sigma')$. Die noch fehlenden acht kommen — wie später gezeigt werden wird — durch viermalige Berührung beider zustande.

Die der Geraden l′ *in der Verwandtschaft* $\mathfrak{T}_{3,3}$ *entsprechende Kurve* C *erhält einen dreifachen Punkt in* (l′, Σ) *und vier Doppelpunkte auf der Kurve* $\mathfrak{K}$ *in den den vier Schnitten* (l′ $\mathfrak{K}'$) *zugeordneten Punkten*[1]). Damit ist die Maximalzahl [10] der Doppelpunkte für eine Kurve sechster Ordnung erreicht.

Auch die $\mathfrak{T}_{3,3}$ *lässt sich* — ebenso wie die im vorigen Kapitel behandelten Verwandtschaften — *auf die perspektive Lage der Strahlenbüschel um* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}'$ *basieren.* Zu der

[1]) Die Argumentation auf S. 33 kann, wie sich bald zeigen wird, wieder angewandt werden.

Reihe der Punkte auf $\mathfrak{g}'$ werden die Tripel entsprechender Elemente durch die perspektiv darüber gestellten Strahlenbüschel um S_1, S_2, S_3, die Spuren der R^3 in der Ebene $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$, eingeschnitten. Mit dem Punkte X' der Geraden $\mathfrak{g}'$ bewegen sich die drei entsprechenden auf $\mathfrak{g}$ perspektiv, also untereinander projektiv. Es gibt daher auf $\mathfrak{g}'$ sechs Punkte, von deren entsprechenden zwei zusammenfallen; drei vereinigen sich im Punkte $(\mathfrak{g}', \Sigma)$, die drei anderen sind die Schnitte $(\mathfrak{g}', \mathfrak{K}')$[1]).

Unter den Geradenpaaren $\mathfrak{g} \mid \mathfrak{g}'$ sind zunächst diejenigen, deren Konstituenten in den Punkten A, B, C, A′, B′, C′ sich schneiden, hervorzuheben. Einem jeden Punkte X' der $\mathfrak{G}'\mathfrak{A}'$ entspricht stets der A; die beiden anderen bewegen sich zu X' perspektiv auf der Geraden $\mathfrak{G}A$. Sie fallen nach $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, während der erstgenannte Punkt unbestimmt wird, sobald X' den $\mathfrak{A}'$ erreicht. Umgekehrt entspricht einem Punkte X von $\mathfrak{g}$ stets der $\mathfrak{A}'$, während die beiden anderen perspektiv zu X die Gerade $\mathfrak{G}'\mathfrak{A}'$ durchlaufen; sie kommen beide mit X zugleich in den Punkt A zu liegen, in diesem Falle wird aber der dritte entsprechende Punkt unbestimmt. Auf diesen sechs Geradenpaaren artet also eine von den drei Projektivitäten, die durch die Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{3,3}$ in ihren Punktreihen hervorgerufen werden, aus; ihre singulären Elemente sind die beiden einfachen Hauptpunkte.

Da die kubische Raumkurve den Rang vier besitzt, so gibt es durch g vier Ebenen, welche eine Tangente der R^3 aufnehmen; ihre Spuren in Σ und Σ' seien die Geradenpaare t, t′. Von den drei Schnittpunkten einer solchen Ebene mit der Raumkurve sind zwei unendlich nahe. Daher entsprechen einem jeden Punkte von t′ zwei unendlich nahe und ein im allgemeinen endlich entfernter Punkt auf t. Die Geradenpaare t, t′ sind von grösster Bedeutung. Den vier Schnittpunkten (t′, t′) entsprechen auf den Geraden t Punktetripel der C, bei denen je zwei Punkte unendlich nahe liegen.

---

[1]) Der Punkt $\mathfrak{G}'$ ist hierbei allein auf der in ihm berührenden Tangente der Kurve $\mathfrak{K}'$ liegend anzunehmen.

Ausserdem vermitteln die Ebenen (t, t′) innerhalb des Büschels um g die Uebergänge zwischen Ebenen, welche die R^3 dreimal oder nur einmal reell schneiden. In der Ebene Σ' sondern daher die vier durch die Geraden t′ gebildeten Scheitelwinkelpaare zwei Klassen von Punkten; entsprechen einem solchen des einen drei reelle Elemente, so besteht das zu einem Punkte des einen oder anderen Nachbarabschnitts gehörige Tripel aus nur einem reellen und zwei konjugiert imaginären Punkten. Damit wird einmal die Ueberlegung auf S. 33 anwendbar, die hier aus der Vereinigung von zweien der drei auf einer Geraden g bezw. g′ erhaltenen Punkte auf einen Doppelpunkt schliesst (vergl. die Anmerkung zu S. 47), dann aber erkennt man die *Tangenteneigenschaft dvr Geraden* t *und* t′. *Sie berühren die sämtlichen Kurven* C. Da diese die Klasse zehn haben und die im dreifachen Punkt $\mathfrak{G}$ berührenden Tangenten doppelt zu zählen sind, so folgt, dass *alle Kurven* C *vom Punkte* $\mathfrak{G}$ *aus dieselben vier ausserhalb berührenden Tangenten* t *entsenden.*

Ebenso berühren diese Geraden die Hauptkurven der Punkte $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}'$. *Ferner bilden sie die sämtlichen vom Punkte* $\mathfrak{G}$ *ausgehenden Tangenten der Kurve* $\mathfrak{K}$ sechster Klasse; die beiden unendlich nahen Punkte der R^3 ergeben, aus dem dritten Schnitt der Ebene (t, t′) projiziert, zwei konsekutive Elemente der Geraden t (und der t′). *In denselben Punkten tangieren die Geraden* t *auch die Kurve* K. Dass die Geraden t die sämtlichen von $\mathfrak{G}$ ausgehenden Tangenten derselben sind, lehrt folgende Ueberlegung: In jeder Ebene (g, g′) bilden die drei Doppelsekanten der R^3 und die Gerade g′ ein vollständiges Vierseit. (Fig. 5.) Drei von seinen Ecken sind die in die Ebene hineinfallenden Punkte der R^3, die drei Gegenecken sind die Schnitte mit der Kurve $\mathfrak{K}'$. Die drei Diagonalen des Vierseits schneiden die auf der g liegenden Punkte der K ein. Da die drei Schnitte (g′, $\mathfrak{K}'$) und ebenso diejenigen der Ebene (g, g′) mit R^3 gleichartig, reell oder imaginär, bleiben, solange keine Gerade t′ passiert wird, so gilt dasselbe auch von

denen der korrespondierenden Geraden $\mathfrak{g}$ mit K, d. h. es entsteht ein Doppelpunkt dieser Kurve (nicht Berührung der $\mathfrak{g}$), sobald ein Diagonalpunkt in die Ebene Σ zu liegen kommt. Ihre Anzahl stimmt mit der Ordnung der von den Diagonalpunkten erfüllten Raumkurve überein. In jeder Ebene durch g liegt ein Vierseit mit drei Diagonalpunkten. Die Ordnung der entstehenden Kurve ist jedoch höher als drei, da solche Punkte auch auf die Gerade g selbst fallen werden. Zur Bestimmung ihrer Zahl diene folgende Korrespondenz: Ein beliebiger Punkt $\mathfrak{X}$ von g projiziert die R^3 durch einen Kegel dritter Ordnung mit Doppelkante, die $\mathfrak{K}'$ durch einen Kegel vierter Ordnung. Ausser den durch $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ gehenden Kanten und der durch $\mathfrak{X}$ bestimmten Doppelsekante der R^3 haben sie noch vier einfache Kanten gemein. Der Punkt $\mathfrak{X}$ bestimmt also vier durch ihn gehende Strahlen, welche zu Punkten der Kurve K führen, und damit vier Vierseite, wie sie oben beschrieben wurden. Ordnet man ihm die Schnitte je der beiden anderen Diagonalen mit der g als entsprechend zu, so entsteht in der Punktreihe dieser Geraden eine involutorische Korrespondenz [8]. Von den durch den Punkt $\mathfrak{G}'$ gehenden vier Strahlen sind drei die Geraden $\mathfrak{G}'\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{G}'\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{G}'\mathfrak{C}'$, welche die $\mathfrak{K}'$ noch je einmal treffen; der vierte liegt in jener Ebene, welche die in $\mathfrak{G}'$ berührende Tangente der Kurve $\mathfrak{K}'$ aufnimmt. Der Punkt $\mathfrak{G}'$ vereinigt sich also im allgemeinen nicht mit einem seiner entsprechenden Punkte. Einfache Koinzidenzen sind hingegen jene Punkte der Geraden g, von deren vier Strahlen einer nach dem Berührungspunkt der Kurve $\mathfrak{K}'$ auf einer Geraden $\mathfrak{k}'$ geht; ihnen wird je ein unendlich naher Punkt zugeordnet. Die übrigen zwölf Koinzidenzen kommen durch Diagonalpunkte zustande. Da ein solcher eine doppelte Koinzidenz darstellt — von seinen acht entsprechenden Punkten vereinigen sich zwei mit ihm —, so liegen sechs Diagonalpunkte auf g. Als Ordnung der gesuchten Kurve ergibt sich neun; die K erhält ebensoviele Doppelpunkte. Dadurch wird sie unikursal. Ihre Klasse sinkt auf zwölf;

von dem vierfachen Punkte $\mathfrak{G}$ gehen also vier anderwärts berührende Tangenten, die Geraden $\mathfrak{t}$ aus.

Eine dritte Klasse wichtiger Geradenpaare $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ ist dadurch bestimmt, dass auf einer der drei ihnen begegnenden Doppelsekanten der R^3 die Schnitte mit der Raumkurve von denen mit den Ebenen Σ und Σ' harmonisch getrennt werden. Die beiden im vorigen Kapitel (S. 28) angeführten Methoden zur Bestimmung ihrer Anzahl sind auch hier mit Erfolg zu verwenden.

1). Gesucht werden solche die g treffende Doppelsekanten, auf denen die Schnittpunkte mit den Ebenen Σ und Σ' inbezug auf die R^3 konjugiert sind. Die Spurkurve $\mathfrak{K}$ 4 ($\mathfrak{A}$ 2, $\mathfrak{B}$ 2, $\mathfrak{C}$ 2,...) der von ihnen gebildeten Regelfläche in Σ wird durch die involutorische Verwandtschaft dritten Grades dieser Punkte in eine Raumkurve 12. Ordnung übergeführt, von der sich indessen die drei Tangenten der R^3 in den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ je zweimal ablösen. Die sechs Schnittpunkte der Restkurve in Σ' und die ihnen konjugierten von $\mathfrak{K}$ bestimmen sechs Doppelsekanten der R^3 und damit sechs Geradenpaare $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ von der Art, wie wir sie suchen. Sie werden fortan durch Ueberstreichen gekennzeichnet werden. Ihre Bedeutung wird sich erst bei Besprechung der verbundenen Verwandtschaften offenbaren.

2). Auch die andere Methode, welche den Satz benützt, dass zwei ineinanderliegende involutorische Korrespondenzen [m], [n] m n gemeinsame Paare besitzen, führt zum Ziel. Die beiden Korrespondenzen sind hier die Involution der zu Σ, Σ' harmonischen Ebenen und die [6] derjenigen Ebenen aus ($\Sigma\Sigma'$), welche nach den Stützpunkten der die g treffenden Doppelsekanten gehen.

Die Charakteristiken des Systems der Kurven C *sind 9, 30, 96.* Durch zwei Punkte X und Y gehen neun Kurven C; sie entsprechen jenen Geraden, welche einen von den drei entsprechenden Punkten des X mit einem des Y verbinden. Die Kurven C′ haben die Klasse zehn, empfangen also aus einem jeden der drei Punkte X'_1, X'_2, X'_3, welche dem X entsprechen, zehn Tangenten. Transformiert man die Figur

durch die $\mathfrak{T}_{3,3}$ so findet man 30 Kurven C, welche eine feste Gerade tangieren und durch einen bestimmten Punkt gehen. Zwei Kurven C′ haben 100 gemeinsame Tangenten, darunter die Geraden l′; es gibt also 96 Kurven C, welche zwei feste Gerade tangieren.

Mit einer dreidreideutigen Verwandtschaft ist in jeder der beiden Ebenen eine sechssechsdeutige involutorische Verwandtschaft, $\mathfrak{T}_6$ *in* Σ, $\mathfrak{T}'_6$ *in* Σ', *verbunden.* Man erhält sie, wenn man einem jeden Punkt der einen oder anderen Ebene die je drei zweiten und dritten Punkte als verbunden zuordnet, die in der $\mathfrak{T}_{3,3}$ zu seinen drei entsprechenden Punkten gehören.

Zwei Kurven C haben 36 Schnitte; neun davon repräsentiert der Punkt $\mathfrak{G}$, weitere sechs fallen in die einfachen Hauptpunkte und drei entsprechen dem Schnittpunkt der beiden Geraden l′ und l'_1, aus denen die Kurven C durch Anwendung der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{3,3}$ entstehen. Die achtzehn noch fehlenden kommen dadurch zu stande, dass es auf l′ und l'_1 achtzehn Paare verbundener Punkte gibt, die einen gemeinsamen entsprechenden haben. Daraus folgt, dass *die verbundenen Punkte der Geraden* l′ *eine Kurve 18. Ordnung erfüllen.* Man erhält sie, wenn man auf die der Geraden l′ entsprechende Kurve C abermals die $\mathfrak{T}_{3,3}$ anwendet. Von der Kurve 36. Ordnung, die sich zuerst ergibt, lösen sich die Hauptkurve dritter Ordnung des $\mathfrak{G}$ dreimal, die Hauptgeraden der einfachen Hauptelemente je einmal und die Gerade l′ dreimal ab, sodass eine Kurve 18. Ordnung $\mathfrak{C}'$ zurückbleibt. *Auf ihr liegen die Punkte* $\mathfrak{A}_1', \ldots \mathfrak{C}_2'$ *einfach und* A, B, C *doppelt.* Auf der Kurve C liegen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, A, B, C wegen der Schnitte der l′ mit den sechs Strahlen aus $\mathfrak{G}'$ nach A′, B′, C′, A, B, C, auf denen sich jeder unbestimmt gewordene entsprechende der genannten sechs Punkte der Ebene Σ ausbreitet. Daher müssen ihre Paare fester entsprechender Punkte, eben die als Hauptelemente der $\mathfrak{T}'_6$ bezeichneten, der verbundenen Kurve der Geraden l′ angehören. *Ebenso liegen die Punkte* $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, A′, B′, C′ *doppelt auf den verbundenen Kurven* $\mathfrak{C}'$, weil die Kurven C auf ihren

Hauptgeraden $\mathfrak{G}$ (A, B, C, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$) noch je zwei nicht in Hauptelemente fallende Schnittpunkte besitzen. Die zu einem jeden Punkte gehörigen sechs verbundenen liegen, wie schon die Zerlegung der $\mathfrak{T}_{3,3}$ (S. 47) zeigt, auf seiner Verbindungsgeraden mit $\mathfrak{G}'$. Die Kurven $\mathfrak{C}'$ besitzen also auf jeder Geraden $\mathfrak{g}'$ sechs Punkte; *daher muss* $\mathfrak{G}'$ *zwölffacher Hauptpunkt der* $\mathfrak{T}'_6$ *sein.* Zur Kennzeichnung der den Geraden von Σ' verbundenen Kurven diene

$\mathfrak{C}'$ 18 ($\mathfrak{G}'$ 12, A 2,.., $\mathfrak{A}'$ 2,.., A′ 2,.., $\mathfrak{A}'_1$,..$\overline{\mathfrak{C}}'_2$).

Die Auflösung der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{3,3}$ in dreifache Perspektivitäten in den Punktreihen zugeordnete Strahlen der perspektiven Büschel um $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ ermöglicht es, *die* $\mathfrak{T}'_6$ *in* ∞^1 *einstufige involutorische Korrespondenzen auf den Strahlen* $\mathfrak{g}'$ *zu zerlegen.* Sind S_1, S_2, S_3 die Treffpunkte der R^3 mit einer Ebene ($\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$), so erhält man für einen die $\mathfrak{g}'$ durchlaufenden Punkt X′ eine Reihe verbundener Punkte etwa durch die Folge nachstehender vier Operationen: Projektion aus S_1, Schnitt mit $\mathfrak{g}$, Projektion aus S_2, Schnitt mit $\mathfrak{g}'$, also durch zwei perspektive Uebertragungen, von $\mathfrak{g}'$ nach $\mathfrak{g}$ — Zentrum S_1 —, und zurück von $\mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{g}'$ — Zentrum S_2. Zwei weitere Reihen verbundener Punkte ergeben sich, wenn man S_2, S_3 und S_3, S_1 als Perspektivitätsmittelpunkte nimmt, aber ebenso führen auch die Umkehrungen — Zentra S_2, S_1; S_3, S_2; S_1, S_3 — zu solchen. *Die involutorische Korrespondenz, die durch die* $\mathfrak{T}'_6$ *in der Punktreihe einer Geraden* $\mathfrak{g}'$ *induziert wird, besteht also aus drei Projektivitäten, vermittelt durch zweimalige perspektive Uebertragung, und ihren Umkehrungen, und dadurch wird die Beziehung involutorisch.* Die sechs einem X′ verbundenen Punkte $\overline{X}'$ bewegen sich mit ihm und unter einander projektiv auf seiner Verbindungsgeraden mit $\mathfrak{G}'$; es gibt daher 15 Paare von Koinzidenzpunkten. Ein Element eines jeden Paares fällt stets nach ($\mathfrak{g}'$, Σ). Da nämlich dieser Punkt sich mit seinen drei entsprechenden vereinigt, gleichgiltig in welche Ebene man ihn rechnet, so müssen auch seine sechs verbundenen Punkte mit ihm koinzidieren. Ferner führen die drei Schnittpunkte ($\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{K}'$) zu vereinigten Punkten

$\bar{X}'$. Von den drei durch einen solchen Punkt gehenden $\mathfrak{T}$-Strahlen fallen zwei in eine Doppelsekante der R^3 zusammen, und diese liefert zwei dem Ausgangselement $(\mathfrak{g}', \mathfrak{K}')$ verbundenen Punkte, die sich mit ihm vereinigen; der Schnitt X der Doppelsekante mit $\mathfrak{g}$ ergibt, aus dem dritten Treffpunkt der Ebene $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ mit der R^3 projiziert, einen Punkt der Kurve K'; in ihm vereinigen sich ebenfalls zwei dem X' verbundene Punkte, da demselben der Punkt X doppelt als entsprechend zuzurechnen ist. Umgekehrt schliessen wir, dass einem jeden der drei Schnitte $(\mathfrak{g}', K')$ der zugehörige Punkt $(\mathfrak{g}', \mathfrak{K}')$ doppelt verbunden ist. Die neun einfachen Koinzidenzen zweier Punkte X', die sich so ergeben haben, kommen dadurch zustande, dass von den sechs $\mathfrak{T}$-Strahlen, die zu ihnen führen, je zwei identisch werden. Die noch fehlenden sechs entstehen dadurch, dass zwei der sechs $\mathfrak{T}$-Strahlen sich auf der Ebene Σ' schneiden. Die von ihnen gebildete Kurve wird uns später noch beschäftigen.

Bei den Strahlen von $\mathfrak{G}'$ nach A, B, C, A', B', C' arten von den sechs durch die $\mathfrak{T}'_6$ hervorgerufenen Projektivitäten vier aus. Auf der Geraden $\mathfrak{G}'$ $\mathfrak{A}'$ A (Fig. 6.) sind einem beliebigen Punkte X' doppelt je die Punkte A und $\mathfrak{A}'$ verbunden. Fällt X' nach $\mathfrak{A}'$, so werden zwei seiner verbundenen Punkte unbestimmt, zwei weitere fallen wiederum nach $\mathfrak{A}'$. Von den sechs dem A verbundenen Punkten vereinigen sich vier mit ihm, während die anderen zwei unbestimmt werden. Aehnliche Verhältnisse herrschen auf der Geraden $\mathfrak{G}'$ A'. (Fig. 7.) Einem beliebigen Punkte sind $\bar{\mathfrak{A}}'_1$, $\bar{\mathfrak{A}}'_2$ und doppelt A' verbunden; dem $\bar{\mathfrak{A}}'_1$ bezw. $\bar{\mathfrak{A}}'_2$ gehören er selbst und A' einfach, $\bar{\mathfrak{A}}'_2$ bezw. $\bar{\mathfrak{A}}'_1$ doppelt sowie ein fünfter Punkt als verbunden zu, während der sechste unbestimmt wird. A' schliesslich ist sich selbst vierfach verbunden, während die beiden letzten Punkte unbestimmt sind. Damit besitzen wir zugleich die Hauptkurven der einfachen und doppelten Hauptpunkte der $\mathfrak{T}'_6$. Zur Uebersicht diene die folgende Tabelle. Die senkrecht unter einander stehenden Punkte gehören zu derselben von den sechs

projektiven Reihen, die durch die verbundenen Punkte auf einer Geraden $\mathfrak{g}'$ bewirkt werden.

	Es sind verbunden den	die sechs Punkte
Erster Typus: $\mathfrak{G}'\mathfrak{A}'A$	X'	A A $\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{A}'$ . .
	$\mathfrak{A}'$	unbest. $\overline{\mathfrak{A}}'$ $\overline{\mathfrak{A}}'$ auf K'
	A	A A unbest. A A
Zweiter Typus: $\mathfrak{G}'\overline{\mathfrak{A}}'_1\overline{\mathfrak{A}}'_2A'$	X'	$\overline{\mathfrak{A}}'_1$ $\overline{\mathfrak{A}}'_2$ A' A' . .
	$\overline{\mathfrak{A}}'_1$	$\overline{\mathfrak{A}}'_1$ $\overline{\mathfrak{A}}'_2$ unb. A' $\overline{\mathfrak{A}}'_2$.
	$\overline{\mathfrak{A}}'_2$	$\overline{\mathfrak{A}}'_1$ $\overline{\mathfrak{A}}'_2$ A' unb. . $\overline{\mathfrak{A}}'_1$
	A'	unbest. A' A' A' A'

Wichtig werden nun auch die Geraden $\overline{\mathfrak{g}}'$, weil auf ihnen stets zwei der sechs verbundenen Punkte sich vereinigen.

Es bleiben noch die vier Strahlen t' zu untersuchen. Einem Punkte X' entsprechen in der $\mathfrak{T}_{3,3}$ drei Punkte auf der zugeordneten Geraden t, $\mathfrak{S}$, $\overline{\mathfrak{S}}$, $\mathfrak{S}_1$, eingeschnitten von den aus X' nach den Punkten S, $\overline{S}$, S_1 der R^3 gehenden Strahlen; S und $\overline{S}$ und daher auch $\mathfrak{S}$ und $\overline{\mathfrak{S}}$ sind einander unendlich benachbart. Die beiden Strahlen $\mathfrak{S}S$ und $S\overline{\mathfrak{S}}$ führen zu den beiden Nachbarpunkten des X'; aber ebenso liefern je zwei unendlich nahe Punkte die beiden Strahlenpaare $\mathfrak{S}_1$ (S, $\overline{S}$) und S_1 ($\mathfrak{S}$, $\overline{\mathfrak{S}}$). *Auf den Geraden t' sind also einem jeden Punkte seine beiden Nachbarpunkte und zwei weitere Paare konsekutiver Punkte verbunden.*

Die auf einer Geraden $\mathfrak{g}'$ liegenden sechs Punkte der $\mathfrak{C}'$ sind entweder sämtlich reell oder sämtlich imaginär. Die Uebergänge vermitteln allein die Geraden t'. Es gibt — ebenso wie bei den C — drei Arten verbundener Kurven; die einen haben auf jedem Strahl $\mathfrak{g}'$ sechs reelle Punkte, bei der zweiten und dritten Art erfüllen die reell schneidenden

Geraden $\mathfrak{g}'$ einen oder zwei Scheitelwinkelabschnitte des Büschels um $\mathfrak{G}'$.

Die Ueberlegung auf S. 33 wird nun wieder anwendbar. Die vorgenommene Zerlegung der Verwandtschaft $\mathfrak{T}'_6$ lehrt, dass *die der* l′ *verbundene Kurve* $\mathfrak{C}'$ *in* (l′ Σ) *einen sechsfachen und in den vier Schnitten* (l′ $\mathfrak{K}'$) *Doppelpunkte erhält. Diese bewirken weiter vier auf der Kurve* K′ *gelegene Doppelpunkte. Sieben weitere Doppelpunkte auf* $\mathfrak{K}'$ *werden veranlasst durch die Treffpunkte* (l′, K′) *und sechs auf den Geraden* $\bar{\mathfrak{g}}'$. *Ferner berührt die Kurve* $\mathfrak{C}'$ *die vier Geraden* $\mathfrak{t}'$ *in ihren Schnitten mit der* l′ *und ausserdem noch je zweimal.* Da weitere von $\mathfrak{G}'$ ausgehende Tangenten nicht möglich sind — nur an den Geraden $\mathfrak{t}'$ tritt der hierzu notwendige Uebergang in der Art des Entsprechens ein —, so besitzen die Kurven $\mathfrak{C}'$ die Klasse 36. Diese wird bewirkt durch $^1/_2$ (18 . 17—36) = 135 Doppelpunkte. Die bereits nachgewiesenen vielfachen Punkte repräsentieren 111 solche, $\mathfrak{G}'$ zählt für 66, A,..A′,..$\mathfrak{A}'$,..sind weitere 9, in (l′ Σ) sind 15 vereinigt, in (l′ $\mathfrak{K}'$) liegen 4, auf K′ 4, weiter auf $\mathfrak{K}'$ 7, auf den Geraden $\bar{\mathfrak{g}}'$ 6; die 24 noch fehlenden können nur dadurch zustande kommen, dass es auf l′ 24 Punkte gibt von der Eigenschaft, dass von den sechs Strahlen, die zu ihren verbundenen Punkten führen, zwei sich auf Σ' schneiden. Da wir auf jeder Geraden $\mathfrak{g}'$ sechs derartige Punkte festgestellt haben, so müssen achtzehn sich in $\mathfrak{G}'$ vereinigen. Die 135 Doppelpunkte bewirken für die Kurven $\mathfrak{C}'$ das Geschlecht 1.

Es bleibt nun nur noch *die verbundene Kurve des* $\mathfrak{G}'$ zu untersuchen. Sie *hat die Ordnung 12*; man gelangt zu ihr, wenn man die Hauptkurve des $\mathfrak{G}'$ durch die Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{3,3}$ transformiert. Da der Punkt $\mathfrak{G}'$ auf allen Strahlen $\mathfrak{g}'$ als ein gewöhnlicher X′ anzusehen ist, so zeigt die Tabelle auf S. 55, dass ihm A, . ., $\mathfrak{A}'$, . . A′ . . doppelt und $\mathfrak{A}'_1$, . . $\mathfrak{C}'_2$ einfach verbunden sind und daher in diesen Vielfachheiten auf seiner verbundenen Kurve liegen; der Punkt $\mathfrak{G}'$ selbst hat auf ihr die Vielfachheit sechs. Ferner

besitzt sie sechs Doppelpunkte auf den Geraden $\mathfrak{g}'$, vier weitere auf $\mathfrak{K}'$ liegende werden durch die einfachen, nicht in Hauptpunkte fallenden Schnitte der Hauptkurve des $\mathfrak{G}'$ mit der $\mathfrak{K}$ bewirkt, zu einem auf K′ liegenden führt die einzige durch $\mathfrak{G}'$ gehende Doppelsekante d der R^5. Achtzehn weitere kommen auf denjenigen Geraden $\mathfrak{g}'$ zustande, auf welchen sich zwei von den sechs Strahlen schneiden, die zu den verbundenen Punkten des $\mathfrak{G}'$ führen. Auf der Spur der Ebene (g, d), der in $\mathfrak{G}'$ berührenden Tangente der $\mathfrak{K}'$, ergeben sich nur vier ausserhalb von $\mathfrak{G}'$ liegende Punkte, darunter ein Doppelpunkt; daher wird diese Spurgerade doppelte Tangente im Punkte $\mathfrak{G}'$. Es existieren also wiederum zwei Kurvenzüge, welche einander in $\mathfrak{G}'$ berühren; ihre Tangente haben sie mit $\mathfrak{K}'$ gemeinsam. Auf den Geraden t′ liegen die beiden Nachbarpunkte des $\mathfrak{G}'$ und zwei weitere Paare konsekutiver Elemente. Daraus schliessen wir, dass im Punkte $\mathfrak{G}'$ vier Wendepunkte übereinander gelagert sind; die zugehörigen Wendetangenten, die vier Strahlen t′, berühren die Kurve noch je zweimal. Der Punkt $\mathfrak{G}'$ ist also mit 16 Doppelpunkten äquivalent zu setzen. Die vielfachen Punkte bewirken das Geschlecht 1.

2.

Nun ersetzen wir die R^5 wieder durch eine Raumkurve vierter Ordnung, R_1^4, die wir zunächst als erster Art annehmen; g sei eine einfache Sekante derselben, ihr Treffpunkt G. *Die durch Zuordnung der Spuren der* $\mathfrak{T}$*-Strahlen in den Punktfeldern* Σ *und* Σ' *entstehende Verwandtschaft ist dreidreideutig, ihr Grad steigt auf sieben*; zu den acht Erzeugenden der Regelschar [ll′ g], welche der R_1^4 begegnen, gehört auch die durch G gehende, die anderen sind sämtlich $\mathfrak{T}$-Strahlen.

Einfache Hauptpunkte in Σ *sind die beiden Quadrupel* $\mathfrak{A}$, . . $\mathfrak{D}$ und A, . . D; jenen entsprechen die Punktreihen der Geraden aus $\mathfrak{G}'$ nach A′, . . D′ und auf diesen noch besonders je zwei Punkte, $\overline{\mathfrak{A}}'_1$, $\overline{\mathfrak{A}}'_2$, . . . $\overline{\mathfrak{D}}'_2$, die Spuren der die g treffenden Kanten der Projektionskegel der R_1^4, durch

diese gehen je drei $\mathfrak{T}$-Strahlen, von denen indessen immer einer in die Ebene Σ' hineinfällt und einen unbestimmten Schnitt liefert; die vier Paare der übrigen $\mathfrak{T}$-Strahlen machen die Punkte A, . . D doppelt sich selbst entsprechend. *Dem* $\mathfrak{G}$ *entspricht in* Σ' *die Spurkurve vierter Ordnung seines Projektionskegels der* R^4_1,

$$\mathfrak{H}' \; 4 \; (\mathfrak{G}', \mathfrak{A}', \ldots A', \ldots),$$

welche zwei Doppelpunkte besitzt. Ihr Geschlecht ist 1, ihre Klasse acht.

Jeder Punkt der Geraden $(\Sigma\Sigma')$ vereinigt sich mit seinen drei entsprechenden, da von den drei mit ihm inzidenten $\mathfrak{T}$-Strahlen im allgemeinen — Ausnahmen bilden nur die Punkte A, . . D, A', . . D' — keiner in eine der beiden Ebenen hineinfällt. Die Doppelsekanten der R^4_1, welche der g begegnen, erfüllen eine Regelfläche fünfter Ordnung[1]. Ihre Spuren in den beiden Ebenen sind Kurven fünfter Ordnung, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$. Zur Kennzeichnung der in Σ' liegenden diene

$$\mathfrak{K}' \; 5 \; (\mathfrak{G}' \; 2, \; \mathfrak{A}' \; 2, \ldots \bar{\mathfrak{A}}'_1, \ldots \bar{\mathfrak{D}}'_2);$$

ausserdem liegen die beiden Doppelpunkte der Hauptkurve des $\mathfrak{G}$ auf ihr. Ihr Geschlecht ist also 1, ihre Klasse zehn. Durch die Erzeugenden der Regelfläche werden die Punkte der beiden Kurven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ in eindeutige Beziehung gebracht; in der $\mathfrak{T}_{3,3}$ entspricht einem Punkte der einen von ihnen der zugeordnete der anderen doppelt und ein dritter Punkt. Wir haben nun die Aufgabe, den Ort dieser dritten Punkte zu bestimmen. Durch die $\mathfrak{T}_{3,3}$ wird die $\mathfrak{K}'$ in eine Kurve 35. Ordnung transformiert, von der sich jedoch Hauptkurven in der Gesamtordnung 16 ablösen, nämlich die Hauptkurve des $\mathfrak{G}'$ und die Hauptgeraden von $\mathfrak{A}'$, . . $\mathfrak{D}'$ je doppelt. Zu der Restkurve 19. Ordnung gehört zweimal die $\mathfrak{K}'$, es bleibt demnach eine Kurve neunter Ordnung, K, als Ort der gesuchten Punkte. Die sechs Schnitte von

[1]) Zur Fläche achter Ordnung, die sich bei einer beliebigen Geraden des Raumes ergibt, wird sie durch den Projektionskegel dritter Ordnung der R^4_1 aus G ergänzt.

$\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{K}'$, welche in einfache Punkte beider Kurven fallen, lehren, dass der Punkt $\mathfrak{G}$ sechsfach auf der K liegt; diese Kurve geht ferner einfach je durch $\mathfrak{A}_1$, . . $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{A}$, . . $\mathfrak{D}$, A, . . D und die fünf Punkte $(\Sigma\Sigma')$, $\mathfrak{K}$), also

K 9 ($\mathfrak{G}$ 6, $\overline{\mathfrak{A}}_1$, . . $\overline{\mathfrak{D}}_2$, $\mathfrak{A}$, . . $\mathfrak{D}$, A, . . D).

Damit sind $6.2 + 8 + 4.2 + 5 = 33$ Schnittpunkte ($\mathfrak{K}$, K) gewonnen; die noch fehlenden zwölf werden später nachgewiesen werden.

Die einer Geraden l′ *in der* $\mathfrak{T}_{3,3}$ *entsprechende Kurve* C *geht viermal durch* $\mathfrak{G}$, *einfach je durch* $\mathfrak{A}$, . . $\mathfrak{D}$, A, . . D:

C 7 ($\mathfrak{G}$ 4, $\mathfrak{A}$, . . $\mathfrak{D}$, A, . . D).

Ferner besitzt sie einen dreifachen Punkt in (l′, Σ) *und fünf Doppelpunkte auf* $\mathfrak{K}$; sie entsprechen den Schnitten (l′, $\mathfrak{K}'$). Damit haben die Kurven C das Geschlecht 1 erreicht. Ihre Klasse ist 14.

Ebenso wie die vorige lösen wir auch diese Verwandtschaft in dreifache Perspektivitäten auf den zugeordneten Strahlen g *und* g′ *der perspektiven Büschel um* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}'$ *auf.* Bewegt sich X′ auf g′, so beschreiben seine drei entsprechenden Punkte projektive Reihen auf g; von den sechs Koinzidenzen je zweier entsprechender Punkte vereinigen sich drei in (g, Σ'), die anderen in den Schnitten mit $\mathfrak{K}$[1]). Auf den Strahlenpaaren nach A, . . D, A′, . . D′ artet eine der drei Projektivitäten aus; singuläre Elemente sind die einfachen Hauptpunkte. Ferner lassen sich acht Strahlenpaare $\overline{\mathfrak{g}}$, $\overline{\mathfrak{g}}'$ nachweisen, die auf einer der drei begegnenden Doppelsekanten die Schnitte mit der Raumkurve harmonisch trennen.

Da die R_1^4 den Rang acht besitzt, so gibt es in dem Büschel um die einfache Sekante g sechs Ebenen, welche eine ausserhalb berührende Tangente der Raumkurve aufnehmen; ihre Spuren in Σ und Σ' seien t und t′. In der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{3,3}$ entsprechen einem Punkte der einen

[1]) Der Punkt $\mathfrak{G}$ ist hierbei allein auf seinen beiden Doppelpunktstangenten liegend gedacht.

zwei konsekutive und ein dritter Punkt der anderen. Innerhalb des Büschels um g findet bei den Ebenen (t, t′) ein Uebergang von solchen Ebenen, welche die Raumkurve dreimal reell schneiden, zu denen, bei welchen nur ein Treffpunkt reell ist, statt. Daher tritt längs der Geraden t bezw. t′ ein Wechsel von Punkten mit drei reellen entsprechenden zu solchen mit nur einem reellen entsprechenden ein. *Die sechs Geraden* t *bilden die sämtlichen vom Punkte* $\mathfrak{G}$ *ausgehenden Tangenten der Hauptkurve des* $\mathfrak{G}'$, *der Kurven* C, *der* $\mathfrak{K}$ *und* K. *Die beiden letztgenannten berühren sich auf ihnen sechsmal;* das sind die fehlenden zwölf Schnitte. Wenn der Punkt $\mathfrak{G}$ nur sechs Tangenten an die K aussenden soll, so muss sie noch zwölf Doppelpunkte erhalten. Diese lassen sich in der Tat nachweisen. Wir konstruieren wiederum (siehe S. 49) in einer Ebene durch g das vollständige Vierseit der drei Doppelsekanten, ergänzt durch die g′; seine Diagonalen führen zu Punkten der K. Ein Doppelpunkt dieser Kurve kommt also zustande, sobald ein Diagonalpunkt in die Ebene Σ hineinfällt. Ihre Anzahl ist gegeben durch die Ordnung der Raumkurve, die sie bei Drehung der Ebene um g erfüllen. In jeder Ebene dieses Büschels liegen drei derartige Punkte; es kommt jedoch neunmal vor, dass einer von ihnen auf die g selbst fällt, wie sich durch eine Korrespondenz nach Art der im vorigen Abschnitt angestellten zeigen lässt. Die entstehende Raumkurve ist also zwölfter Ordnung; ihre Schnitte mit der Ebene Σ liefern die gesuchten Doppelpunkte der Kurve K, die dadurch das Geschlecht 1 erreicht[1]).

Zwei Kurven C haben 49 Schnittpunkte; 24 davon fallen in Hauptpunkte und drei entsprechen dem Schnitt der Geraden l′ und l'_1, aus denen die betrachteten Kurven durch Anwendung der $\mathfrak{T}_{3,3}$ hervorgehen. Die übrigen lehren, dass *die mit der* $\mathfrak{T}_{3,3}$ *verbundene sechssechsdeutige*

[1]) Man kann auch so schliessen: die K steht in eindeutiger Punktbeziehung mit $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}$, muss also wie diese das Geschlecht 1, d. h. noch 12 Doppelpunkte besitzen.

involutorische Verwandtschaft $\mathfrak{T}'_6$ *den Grad 22 besitzt.* Die der Geraden l′ entsprechende C wird also durch die $\mathfrak{T}_{3,3}$ in eine Kurve 22. Ordnung $\mathfrak{C}'$ transformiert. *Zugleich erweisen sich die acht Punkte* $\overline{\mathfrak{A}}'_1, \ldots \overline{\mathfrak{D}}'_2$ *als einfache,* A, . . D *als doppelte Hauptpunkte*; sie entsprechen den einfachen Hauptelementen der C neben den sich absondernden Hauptgeraden. *Ebenso liegen* $\mathfrak{A}'$, . . $\mathfrak{D}'$, A′, . . D′ *doppelt auf den verbundenen Kurven*, da die C auf einem jeden der acht Strahlen aus $\mathfrak{G}$ nach A, . . D, A′, . . D′, ihren Hauptgeraden in der $\mathfrak{T}_{3,3}$, zwei nicht in Hauptelemente fallende Schnitte besitzen. *Der Punkt* $\mathfrak{G}'$ *wird sechzehnfacher Hauptpunkt der* $\mathfrak{T}'_6$. Zur Kennzeichnung der den Geraden von Σ' verbundenen Kurven diene

$\mathfrak{C}'$ 22 ($\mathfrak{G}'$ 16, $\mathfrak{A}'$ 2, . ., A′ 2, . ., A 2, . . $\overline{\mathfrak{A}}'_1$, . .).

Die Auflösung der $\mathfrak{T}_{3,3}$ in je drei Perspektivitäten auf den Strahlenpaaren $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ ermöglicht es, ebenso wie im vorigen Abschnitt die verbundene Verwandtschaft $\mathfrak{T}'_6$ in ∞^1 einstufige involutorische Korrespondenzen auf den Geraden $\mathfrak{g}'$ zu zerlegen, welche aus drei Projektivitäten, vermittelt durch zweimalige perspektive Uebertragung, und ihren Umkehrungen bestehen. Mit einem Punkte X′ bewegen sich seine sechs verbundenen projektiv; es muss also dreissig mal vorkommen, dass sich zwei von ihnen vereinigen. Alles bleibt ungeändert wie im vorigen Abschnitt, denn auch hier haben die Kurven $\mathfrak{K}'$ und K′ nur drei ausserhalb von $\mathfrak{G}'$ liegende Schnitte mit einer Geraden $\mathfrak{g}'$.

Auf den acht Strahlen aus $\mathfrak{G}'$ nach A, . . D, A′, . . D′ arten vier der sechs Projektivitäten aus. Auch hier können wir auf den vorigen Abschnitt verweisen.

Einem jeden Punkte von t′ werden seine beiden Nachbarpunkte und zwei weitere Paare konsekutiver Elemente als verbunden zugeordnet. Auf den acht Geraden $\overline{\mathfrak{g}}'$ vereinigen sich stets zwei der sechs verbundenen Punkte.

Die der l′ *verbundene Kurve* $\mathfrak{C}'$ *erhält also einen sechsfachen Punkt in* (l′ Σ'), *fünf Doppelpunkte in den Schnitten* (l′, $\mathfrak{K}'$), *die zu ebensovielen Doppelpunkten auf der* K′ *führen.*

Deren Schnitte mit der l' *bewirken weitere neun Doppelpunkte auf* $\mathfrak{K}'$. *Acht solche liegen ferner auf den Geraden* $\mathfrak{g}'$. *Die sechs Strahlen* t' *tangieren die* $\mathfrak{C}'$ *in ihren Schnitten mit der* l' *und ausserdem noch je zweimal.* Weitere von $\mathfrak{G}'$ ausgehende Tangenten kann die $\mathfrak{C}'$ nicht besitzen; der Grund dafür ist derselbe wie im vorigen Abschnitt. Demnach ist ihre Klasse 50; es fehlt noch der Nachweis für 32 Doppelpunkte. Diese können nur dadurch zustande kommen, dass es auf l' 32 Punkte gibt, bei denen sich von den sechs Strahlen, die zu den verbundenen Punkten führen, zwei auf der Ebene Σ' schneiden. Da auf jeder Geraden $\mathfrak{g}'$ sechs derartige Punkte liegen, so müssen sich 26 von ihnen in $\mathfrak{G}'$ vereinigen; sie führen auch zu Doppelpunkten der verbundenen Kurve des $\mathfrak{G}'$. Durch die 206 Doppelpunkte erhalten die Kurven $\mathfrak{C}'$ des Geschlecht vier.

Die verbundene Kurve des $\mathfrak{G}'$ *ist sechzehnter Ordnung.* Die einfachen und doppelten Hauptpunkte der $\mathfrak{T}'_6$ liegen auf ihr in gleicher Vielfachheit, $\mathfrak{G}'$ selbst wird auf ihr zehnfach. Sie erhält ferner acht Doppelpunkte auf $\overline{\mathfrak{g}}'$ und sechs auf $\mathfrak{K}'$; diese letzteren werden durch die einfachen Schnitte der Hauptkurve des $\mathfrak{G}'$ mit der $\mathfrak{K}$ bewirkt. Auf den beiden durch $\mathfrak{G}'$ gehenden Doppelsekanten der R_1^4 erhält man den $\mathfrak{G}'$ doppelt und dazu noch je einen weiteren Doppelpunkt. Wir schliessen, dass sich zweimal zwei Aeste der Kurve in $\mathfrak{G}'$ berühren, und zwar längs der Tangenten der Kurve $\mathfrak{K}'$. Auf den Geraden t' werden dem $\mathfrak{G}'$ je seine beiden Nachbarpunkte und zwei weitere Paare unendlich naher Punkte zugeordnet. Die Kurve enthält also sechs im Punkte $\mathfrak{G}'$ übereinander gelagerte Wendepunkte, deren Tangenten, die Geraden t', noch je zweimal berühren. Der Punkt $\mathfrak{G}'$ ist demnach mit 47 Doppelpunkten äquivalent zu rechnen. Da ausserdem noch 26 Doppelpunkte dadurch zustande kommen, dass auf ebensovielen Geraden $\mathfrak{g}'$ sich zwei von den sechs Strahlen, welche die dem $\mathfrak{G}'$ verbundenen Punkte einschneiden, begegnen, so erhält die verbundene Kurve des $\mathfrak{G}'$ das Geschlecht vier.

3.

Ersetzt man die Raumkurve vierter Ordnung erster Art durch eine solche zweiter Art, R^4_{II}, *so bleiben Vieldeutigkeit und Grad der Verwandtschaft sowie die einfachen Hauptpunkte ungeändert.* Die entsprechenden Punkte des $\mathfrak{G}$ erfüllen wiederum eine Kurve vierter Ordnung

$$\mathfrak{H}' \; 4 \; (\mathfrak{G}', \mathfrak{A}', .., A' ..),$$

die aber nun drei Doppelpunkte erhält und dadurch unikursal wird; ihre Klasse ist sechs.

Die den Geraden l′ *entsprechenden Kurven* C *gehen viermal durch* $\mathfrak{G}$, *einfach je durch* $\mathfrak{A}, .. \mathfrak{D}$, A, .. D:

$$C \; 7 \; (\mathfrak{G} \; 4, \mathfrak{A}, .., A, ..).$$

Ein jeder Punkt der Geraden ($\Sigma\Sigma'$) vereinigt sich mit seinen drei entsprechenden. Liegt die Gerade g ganz auf dem einzigen durch die R^4_{II} gehenden Hyperboloid H, so geht durch einen jeden ihrer Punkte eine dreifache Sekante der Raumkurve[1]). Diese erfüllen in ihrer Gesamtheit die Fläche H. Einem jeden Punkte ihrer Spurkegelschnitte in Σ und Σ', welche durch $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}, .. \mathfrak{D}$ bezw. $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{A}', .. \mathfrak{D}'$ hindurchgehen, entspricht in der $\mathfrak{T}_{3,3}$ der [durch die Erzeugenden von H] zugeordnete des anderen dreifach. *Die Kurven* C *erhalten dann drei dreifache Punkte, einen auf* ($\Sigma\Sigma'$) *und zwei auf dem in* Σ *liegenden Kegelschnitt.* Sie sind also unikursal, ihre Klasse ist zwölf.

Ist jedoch g nicht Erzeugende von H, so wird sie von Doppelsekanten getroffen, welche eine Regelfläche sechster Ordnung erfüllen[2]). Ihre Spuren in Σ und Σ' sind Kurven gleicher Ordnung, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$; die in Σ' gelegene $\mathfrak{K}'$ geht dreimal durch $\mathfrak{G}'$, doppelt je durch $\mathfrak{A}', .. \mathfrak{D}'$, einfach durch die acht Punkte $\bar{\mathfrak{A}}'_1, .. \bar{\mathfrak{D}}'_2$ und die drei Doppelpunkte der Hauptkurve des $\mathfrak{G}$, also

$$\mathfrak{K}' \; 6 \; (\mathfrak{G}' \; 3, \mathfrak{A}' \; 2, \mathfrak{B}' \; 2, \mathfrak{C}' \; 2, \mathfrak{D}' \; 2, \mathfrak{A}'_1, .. \mathfrak{D}'_1);$$

[1]) Von Doppelsekanten wird sie in diesem Falle [ausser in G] nicht getroffen.

[2]) Die vollständige Fläche neunter Ordnung wird durch Ablösen des Projektionskegels aus G auf diese Ordnung reduziert.

sie besitzt ferner einen dreifachen Punkt, da die g das Hyperboloid H noch einmal trifft. Auch diese Kurve ist also vom Geschlecht Null; ihre Klasse ist zehn. Durch die Erzeugenden der Regelfläche werden die Punkte der Kurven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ einander eindeutig zugeordnet; einem Punkte der einen entspricht in der $\mathfrak{T}_{3,3}$ doppelt der zugeordnete Punkt der anderen und noch ein dritter Punkt. Ihr Ort ist eine Kurve zehnter Ordnung, K; durch die $\mathfrak{T}_{3,3}$ geht die $\mathfrak{K}'$ in eine Kurve 42. Ordnung über, die sich indessen durch Ablösen von Hauptkurven auf eine solche 22. Ordnung reduziert. Zu dieser gehört doppelt die $\mathfrak{K}$, der Restbestandteil ist die Kurve K. Die sieben in einfache Punkte fallenden Schnitte der Hauptkurve des $\mathfrak{G}$ mit der $\mathfrak{K}'$ lehren, dass $\mathfrak{G}$ in der Vielfachheit sieben auf der K liegt; diese Kurve geht ausserdem einfach durch $\overline{\mathfrak{A}}_1, .. \overline{\mathfrak{D}}_2$, $\mathfrak{A}, .. \mathfrak{D}$, A, .. D und die sechs Schnitte der $\mathfrak{K}$ auf der Geraden $(\Sigma\Sigma')$:

$$K\ 10\ (\mathfrak{G}\ 7, \mathfrak{A}, .. \mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{A}}_1, .. \overline{\mathfrak{D}}_2, A, .. D);$$

der dreifache Punkt der $\mathfrak{K}$ liegt in gleicher Vielfachheit auch auf ihr. Damit haben wir $7 \cdot 3 + 8 + 4 \cdot 2 + 6 + 3 \cdot 3 = 52$ Schnittpunkte der Kurven $\mathfrak{K}$ und K; die noch fehlenden acht werden sich durch vierfache Berührung beider ergeben.

Die Kurven C erhalten einen dreifachen Punkt auf $(\Sigma\Sigma')$ *und sechs Doppelpunkte auf* $\mathfrak{K}$[1]). Sie sind also unikursal, ihre Klasse ist zwölf.

Die Möglichkeit, auch diese Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{3,3}$ auf die perspektive Lage der Büschel um $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ zu basieren, braucht nicht näher erörtert zu werden. Die Anzahl der Strahlenpaare $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ bleibt acht, dagegen verringert sich die Zahl der Paare t, t' auf vier.

Die vier Geraden t *bilden die sämtlichen von* $\mathfrak{G}$ *ausgehenden Tangenten der Hauptkurve des* $\mathfrak{G}'$, *der Kurven* C, *der* $\mathfrak{K}$ *und* K. *Die beiden letztgenannten berühren sich auf diesen vier Strahlen.* Dass die K keine anderen Tangenten mehr aus dem Punkte $\mathfrak{G}$ aussendet, folgt daraus, dass sie

[1]) Drei von ihnen können sich zu einem dreifachen Punkt vereinigen, wenn die Gerade l' durch den dreifachen Punkt des $\mathfrak{K}'$ geht.

— wegen der eindeutigen Punktbeziehung zu $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ — unikursal sein, d. h. noch zwölf Doppelpunkte erhalten muss, welche dann die Klassse 18 bewirken. Ihre Existenz lässt sich auch nach der im ersten Abschnitt (S. 49) durchgeführten Methode beweisen. Auf der Geraden g ergibt sich diesmal eine involutorische Korrespondenz [14]. Von den 28 Koinzidenzen sind die vier einfachen, welche mit den Geraden $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$ in Verbindung stehen, abzusondern. Also kommt es zwölfmal vor, dass ein Diagonalpunkt des in jeder Ebene des Büschels um g zu konstruierenden Vierseits auf die Gerade g selbst fällt. Demnach liegen in jeder Ebene des genannten Büschels 15 Punkte der von den Diagonalpunkten erfüllten Kurve, nämlich die drei des Vierseits und zwölf auf der Axe. Ihr Ort ist eine Raumkurve 15. Ordnung, welche ebensoviele Doppelpunkte der K liefert. Unter ihnen befindet sich jedoch der bereits nachgewiesene dreifache Punkt dieser Kurve[1]).

Der Grad der verbundenen Verwandtschaft bleibt 22; ebenso bleiben die Hauptpunkte ungeändert.

Auch die Auflösung in involutorische Korrespondenzen auf den Strahlen $\mathfrak{g}'$ kann übergangen werden.

Die Kurve $\mathfrak{C}'$, *welche der* $\mathfrak{l}'$ *verbunden ist, erhält einen sechsfachen Punkt in* $(\mathfrak{l}', \Sigma)$, *sechs Doppelpunkte in den Schnitten* $(\mathfrak{l}', \mathfrak{K}')$[2]), *die ebensoviele auf* K′ *im Gefolge haben. Die Schnitte dieser Kurve mit der* $\mathfrak{l}'$ *bewirken zehn weitere Doppelpunkte auf* $\mathfrak{K}$; *acht solche liegen ferner auf den Geraden* $\mathfrak{g}'$. *Die vier Strahlen* $\mathfrak{t}'$ *tangieren die* $\mathfrak{C}'$ *je dreimal, darunter einmal in den Schnittpunkten mit* $\mathfrak{l}'$. Weitere aus $\mathfrak{C}'$ ausstrahlende Tangenten sind nicht möglich. Die vorhandenen bewirken die Klasse 44, es fehlt also noch der Nachweis für 32 Doppelpunkte. Wir folgern, ebenso wie in den vorangehenden beiden Abschnitten, dass es ebenso viele Punkte auf $\mathfrak{l}'$ gibt, bei denen sich zwei der sechs die verbundenen

[1]) Auf diese Weise umgeht man die Schwierigkeit, den Treffpunkt der einzigen dreifachen Sekante als sechsfache Koinzidenz nachzuweisen.

[2]) Sie vereinigen sich zu zwei sechsfachen Punkten, sobald g Erzeugende des Hyperboloids H ist.

Punkte einschneidenden Geraden auf Σ' schneiden. Da auf jedem Strahl g' sechs derartige Punkte liegen, so muss $\mathfrak{G}'$ selbst auf der von ihnen erfüllten Kurve 32. Ordnung in der Vielfachheit 26 gelegen sein. Dadurch werden wir zu 26 Doppelpunkten der verbundenen Kurve des $\mathfrak{G}'$ geführt. Wir können noch feststellen, dass die Kurven $\mathfrak{C}'$ vom Geschlecht 1 sind.

Die verbundene Kurve des $\mathfrak{G}'$ ist sechzehnter Ordnung; auf ihr liegt $\mathfrak{G}'$ selbst zehnfach, die übrigen Hauptpunkte der $\mathfrak{T}'_6$ in gleicher Vielfachheit wie auf den Kurven $\mathfrak{C}$. Neben den bereits erwähnten 26 Doppelpunkten erhält die verbundene Kurve des $\mathfrak{G}'$ sieben weitere, zu denen wir durch die einfachen Schnitte der $\mathfrak{K}$ mit der Hauptkurve des $\mathfrak{G}'$ geführt werden, und acht solche auf den Geraden $\bar{g}'$. Die drei durch $\mathfrak{G}'$ gehenden Doppelsekanten der R^4_{II} liefern diesen Punkt zweimal zurück und noch einen zweiten Doppelpunkt; sechs Aeste der Kurve berühren sich also dreimal zu je zweien in $\mathfrak{G}'$ längs der Tangenten der $\mathfrak{K}'$. Die Geraden t' führen zu vier im Punkte $\mathfrak{G}'$ übereinander gelagerten Wendepunkten der Kurve und berühren ausser in diesem Punkte noch je zweimal. Der Punkt $\mathfrak{G}'$ ist also $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 9 + 3 = 48$ Doppelpunkten gleich zu rechnen. Demnach hat die Kurve das Geschlecht 1.

Die Betrachtungen der beiden letzten Kapitel legen den Gedanken nahe, eine allgemeine Theorie der geschilderten Verwandtschaften zu entwickeln, indem man die zugrunde gelegte spezielle Raumkurve durch eine solche n ter, d. h. beliebiger Ordnung ersetzt. Lässt diese Raumkurve eine $(n-2)$ fache Sekante g zu, so ist die durch $\mathfrak{T}$-Strahlen hergestellte Verwandtschaft zweizweideutig, vom Grade $n + 2$, besitzt in den Spuren der g n fache Hauptpunkte und erhält ausserdem noch in jeder Ebene $2n$ einfache Hauptpunkte in den Schnitten der R^n und den Spuren der in die andere Ebene fallenden $\mathfrak{T}$-Strahlen. Ferner erhalten die den Geraden entsprechenden Kurven $(n + 2)$ter Ordnung auf einer

gewissen Kurve $\mathfrak{K}$, die auf jedem Strahl durch $\mathfrak{G}$ nur noch je einen weiteren Schnitt besitzt, ebensoviele Doppelpunkte, als ihre Ordnung aussagt, und einen auf $(\Sigma\Sigma')$. Die verbundene Verwandtschaft ist vom Grade $2(n+1)$, besitzt in $\mathfrak{G}$ bezw. $\mathfrak{G}'$ einen $2n$ fachen Hauptpunkt und daneben noch $4n$ einfache Hauptpunkte, von denen die Hälfte auf der Geraden $(\Sigma\Sigma')$ liegt. Die Schnitte der Geraden l' mit $(\Sigma\Sigma')$ und der der $\mathfrak{K}$ korrespondierenden Kurve $\mathfrak{K}'$ gleicher Ordnung werden doppelt auf der verbundenen Kurve dieser Geraden. Sie erhält ausserdem auf n Strahlen $\bar{g}'$ je einen weiteren Doppelpunkt. Alle auftretenden Kurven, die Hauptkurven der Punkte $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$, die den Geraden entsprechenden und verbundenen Kurven, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, haben dasselbe Geschlecht und empfangen aus den Punkten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ dieselben Tangenten. Etwas Neues bringen etwa vorhandene Rückkehrpunkte der Raumkurve; während sie bei der $\mathfrak{T}_{2,2}$ zu ebensolchen Punkten in beliebiger Lage führen, bewirken sie für die der Geraden l' verbundenen Kurve Rückkehrpunkte, welche sämtlich die l' zur Rückkehrtangente haben.

Aehnliche Ergebnisse lassen sich auch für die allgemeine dreidreideutige Verwandtschaft, welche vermittels einer Raumkurve n ter Ordnung nebst $(n-3)$ facher Sekante hergestellt ist, ableiten. Wenn hier von einer genaueren Durchbildung dieser Theorie abgesehen wird, so findet dies seine Begründung darin, dass die Raumkurven noch nicht hinreichend untersucht sind, sodass die Frage, ob es Raumkurven n ter Ordnung gibt, welche Sekanten mit $(n-2)$, $(n-3)$ etc. Stützpunkten besitzen, nicht beantwortet werden kann.

Kapitel IV.

Verwandtschaften, welche durch die Doppelsekanten der beiden Raumkurven vierter Ordnung zwischen zwei Punktfeldern hergestellt sind.

1.

Die Doppelsekanten einer Raumkurve vierter Ordnung erster Art R_I^4 *rufen zwischen den Punkten zweier Felder* Σ *und* Σ' *eine zweizweideutige Verwandtschaft* $\mathfrak{T}_{2,2}$ *hervor, wenn man ihre Spuren in den beiden Ebenen einander als entsprechend zuordnet.* Die R_I^4 ist die Basis eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung. Durch jeden Punkt des Raumes — also auch von Σ oder Σ' — geht eine Fläche desselben; ihre beiden Erzeugenden, welche einander in dem fraglichen Punkte begegnen, bilden einen vollständigen ebenen Schnitt, enthalten daher die vier Treffpunkte der verbindenden Ebene mit der R_I^4, und zwar zu je zweien.

Eine beliebige Gerade g des Raumes wird von ∞^1 Doppelsekanten der R_I^4 getroffen, welche eine Regelfläche bilden. Für sie ist die g doppelte Leitgerade, weil von einem jeden ihrer Punkte zwei Erzeugende ausgehen. Jede Ebene des durch sie bestimmten Büschels nimmt sechs Doppelsekanten auf, und diese bilden neben der g den vollständigen Schnitt mit der Regelfläche. Ihre Ordnung ist daher acht. Auf ihr liegt die R_I^4 dreifach; denn durch jeden Punkt $\mathfrak{X}$ derselben geht eine Ebene durch g, und da in dieser noch drei weitere Punkte der Raumkurve liegen, so gehören ihre drei Projektionsstrahlen aus $\mathfrak{X}$ zu der durch die g bestimmten Regelfläche. Daraus ist zu schliessen, dass *die Verwandtschaft achten Grades ist.* Denn legt man die g als l bezw. l′ in die eine oder andere Ebene, so entspricht ihr in der $\mathfrak{T}_{2,2}$ die Spurkurve achter Ordnung der durch sie bestimmten Regelfläche von Doppelsekanten. Gleichzeitig erkennt man, dass *die sämtlichen Kurven* C *bezw.* C′ *je dreimal durch die vier Punkte* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ *bezw.* $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$, die Spuren der R_I^4 in den beiden Ebenen Σ und Σ', *hindurchgehen.*

Ausserdem erhält jede Kurve C *auf* $(\Sigma\Sigma')$ *einen Doppelpunkt in der Spur der Geraden* l′, *der sie entspricht.*

Neben den genannten Punkten heben wir noch hervor A, B, C, $\bar{A}$, B, $\bar{C}$, die Spuren von $\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ in Σ, und A′,..$\bar{C}'$, diejenigen von $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$,...$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in Σ'. Aus $\mathfrak{A}$ wird die R_I^4 durch einen Kegel dritter Ordnung projiziert, dessen Kanten sämtlich Doppelsekanten der Raumkurve sind. Seine Spur in Σ', *eine doppelpunktslose Kurve dritter Ordnung, welche durch* $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$, A′, $\bar{B}'$, $\bar{C}'$ *hindurchgeht, ist die Hauptkurve des* $\mathfrak{A}$. Ebenso findet man Kurven dritter Ordnung als den Punkten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ zugehörig.

Durch den Punkt A gehen zwei Doppelsekanten der R_I^4, nämlich die $\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'$ und eine nicht in die Ebene Σ' hineinfallende. *Der Punkt* A *entspricht daher einmal sich selbst, sein zweiter entsprechender Punkt ist auf der Geraden* $\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'$ *unbestimmt geworden.* Aehnliches gilt von den fünf übrigen Punkten B,..C.

Es zeigt sich abermals, dass die Punkte $\mathfrak{A}$,..$\mathfrak{D}$ dreifach auf allen Kurven C liegen; *daneben erkennt man in* A,..$\bar{C}$ *sechs einfache Hauptpunkte.*

Auf der Geraden $(\Sigma\Sigma')$ vereinigt sich jeder Punkt mit seinen beiden entsprechenden, gleichgültig, in welche Ebene man ihn rechnet, da von den beiden Doppelsekanten, die er an die R_I^4 entsendet, im allgemeinen keine in eine der beiden Ebenen hineinfällt. Der Büschel von Flächen zweiter Ordnung, dessen Basis die R_I^4 ist, besitzt vier Kegel zweiter Ordnung. Auf diesen Flächen haben sich die beiden Regelscharen zu der Kantenreihe des Kegels vereinigt. Bestimmt man also einen Punkt im Raume so, dass die hindurchgehende Büschelfläche einer der vier Kegel wird, so lässt sich durch ihn nur eine einzige Kante, d. h. Doppelsekante legen, welche freilich doppelt zu rechnen ist. Die Spuren dieser vier Kegel in den beiden Ebenen, je vier Kegelschnitte $\bar{\mathfrak{K}}$ und $\mathfrak{K}'$, welche durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ bezw. $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ gehen, sind wichtige Kurven. Sie sind der Ort derjenigen Punkte, deren

entsprechende sich vereinigen, und zugleich Ort von koinzidierenden verbundenen Punkten, also zugleich Grenz- und Doppelkurve. Damit ist auch gesagt, dass sie in eindeutiger Beziehung ihrer Punkte stehen.

Konstruiert man die durch einen Punkt X′ der Geraden l′ gehende Büschelfläche und die in ihm berührende Tangentialebene, so nimmt sie die beiden durch X′ gehenden Doppelsekanten auf. Kommt man, X′ auf der Geraden l′ bewegend, auf einen der vier Kegelschnitte $\mathfrak{K}'$, so berührt die Tangentialebene längs der Kegelkante und nimmt auch noch die Nachbarkante auf. Einem jeden der acht Punkte $(l', \overline{\mathfrak{K}'})$ entsprechen also zwei unendlich nahe Punkte auf dem zugeordneten Kegelschnitt. Ferner sondern die vier Kegel als Träger vereinigter Regelscharen elliptische und hyperbolische Flächen des Büschels. Die Kegelschnitte $\mathfrak{K}'$ bilden daher in der Ebene Σ′ den Uebergang zwischen Punkten, denen reelle oder imaginäre Elemente entsprechen. So zeigt es sich, dass *die der Geraden l′ entsprechende Kurve achter Ordnung die vier Kegelschnitte* $\overline{\mathfrak{K}}$ *je zweimal tangiert*, nämlich in jenen Punkten, welche den Schnitten $(l', \bar{\mathfrak{K}}')$ zugeordnet sind. Die beiden Berührungspunkte mit einem jeden der vier Kegelschnitte liegen mit (l′, Σ) in gerader Linie.

So oft es vorkommt, dass zwei von verschiedenen Punkten einer Geraden l′ ausgehende Doppelsekanten sich auf der Ebene Σ schneiden, entsteht ein Doppelpunkt der entsprechenden Kurve C. Gesucht werden also solche Punkte X der Ebene Σ, die zwei Doppelsekanten der R_1^4 bestimmen, welche beide die Gerade l′ treffen. Da diese aufgenommen werden von der Tangentialebene des Punktes X an die Fläche (R_1^4, X), so kann man auch nach jenen Punkten von Σ fragen, die ihre Tangentialebene durch die Gerade l′ senden. Eine jede von diesen Tangentialebenen geht durch den Pol der Ebene Σ inbezug auf die betrachtete Büschelfläche; der Ort dieser Punkte ist eine kubische Raumkurve[1]; ihre

[1] Sturm, Geom. Verw. III, Nr. 549 S. 145.

Punktreihe steht zu dem Flächenbüschel und damit auch zu dem Kegelschnittbüschel, den jener in einer beliebigen Ebene, hier der Σ, besitzt, in eindeutiger Beziehung. Nun wird folgende Korrespondenz auf der Raumkurve hergestellt. Durch einen jeden ihrer Punkte geht eine Ebene aus l'; sie berührt zwei Kegelschnitte des Büschels in Σ, und deren entsprechende Punkte auf der Raumkurve werden dem Ausgangselement zugeordnet. Geht man von einem Punkt der zweiten Reihe aus, so ist ihm ein Kegelschnitt in Σ zugeordnet; die sechs Schnitte der ihn tangierenden beiden Ebenen aus l' mit der Raumkurve sind dem Ausgangspunkt der zweiten Reihe zuzuordnen. Es ergibt sich also eine Korrespondenz [6.2] mit acht Koinzidenzen. Betrachten wir nun die Schnitte der kubischen Raumkurve mit der Ebene Σ; es sind die Doppelpunkte der drei zerfallenden Kegelschnitte des Büschels, welche diesen selbst in der Projektivität zwischen dem Kegelschnittbüschel und der Raumkurve zugeordnet sind. Die durch einen von ihnen gehende Ebene aus l' berührt neben einem zweiten Kegelschnitt in ihm das Geradenpaar, dessen Doppelpunkt er ist. Er gehört also zu den acht Koinzidenzpunkten der Korrespondenz, und dasselbe gilt von den beiden weiteren Schnitten der Raumkurve mit der Ebene Σ. Die fünf übrigen Koinzidenzpunkte lehren, dass es fünf Tangentialebenen gibt, welche in einem Punkt der Ebene Σ berühren und durch die Gerade l' gehen, dass also *fünf Punkte in der Ebene* Σ *vorhanden sind, deren Doppelsekanten beide der* l' *begegnen. Sie werden Doppelpunkte der entsprechenden Kurve* C.

Die Kurven C besitzen demnach, Punkte höherer Vielfachheit mit eingerechnet, $4 \cdot 3 + 1 + 5 = 18$ Doppelpunkte, sind also 20. Klasse. Von einem Doppelpunkte müssen 16 anderwärts berührende Tangenten ausgehen. Diese sind besonders interessant beim Punkte (l', Σ). Die R_I^4 hat den Rang acht; acht von ihren Tangenten treffen eine beliebige Gerade des Raumes. Es gibt also durch l' acht Ebenen, welche eine Tangente der Raumkurve aufnehmen. Die der l' entsprechende Kurve achter Ordnung kann mit Hilfe

des Ebenenbüschels um diese Gerade dargestellt werden; jede Ebene desselben trifft die R_1^4 in vier Punkten, deren Verbindungslinien zu sechs auf einer Geraden durch (l', Σ) gelegenen Punkten der C führen. Gelangt man in dem Büschel um l' zu einer der acht Ebenen, welche eine Tangente enthalten, so werden zwei von den vier Schnittpunkten mit der Raumkurve unendlich nahe und ergeben, aus den beiden anderen projiziert, zweimal zwei unendlich nahe Punkte der C. *Die der Geraden l' entsprechende Kurve achter Ordnung besitzt acht vom Punkte (l', Σ) ausgehende Doppeltangenten.*

Eine Fläche des Büschels schneidet die Ebene Σ und Σ' je in einem Kegelschnitt, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, welcher durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ bezw. $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ geht. Durch einen jeden Punkt von $\mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{K}'$ lassen sich zwei Doppelsekanten legen, welche einen vollständigen ebenen Schnitt der Fläche bilden und daher den anderen Kegelschnitt treffen. Bewegt sich also ein Punkt X' auf $\mathfrak{K}'$, so durchlaufen seine beiden entsprechenden X und $\bar{X}$ den $\mathfrak{K}$, und umgekehrt. Die verbindende Ebene der beiden Doppelsekanten von X' ist Tangentialebene der Fläche im Punkte X'. Daher umhüllen die Verbindungslinien XX einen dritten Kegelschnitt, die Spur des Berührungskegels der Fläche längs der Kurve $\mathfrak{K}'$. Durchläuft die Fläche den ganzen Büschel, so werden die Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{ABCD})$ und $(\mathfrak{A'B'C'D'})$ projektiv. *Auf diese Projektivität lässt sich die Verwandtschaft basieren; zwei durch sie einander zugeordnete Kegelschnitte tragen eine Punktkorrespondenz [2,2].*

Einem Kegelschnitt des einen Büschels entspricht in der Verwandtschaft $\mathfrak{T}_{2,2}$ der zugeordnete des anderen doppelt.

Die Charakteristiken des Systems der Kurven C *sind 4, 40, 400.*

Nun können wir auch *die Verwandtschaft* betrachten, *welche einem Punkte der Ebene Σ' die Verbindungslinie seiner beiden entsprechenden Punkte in Σ zuordnet.* Sie ist genauer dahin zu definieren, dass einem Punkte von Σ' die Spur der in ihm berührenden Tangentialebene an die hindurchgehende

Büschelfläche[1]) korrespondieren soll. Durch diese schärfere Definition wird erreicht, dass auch den Punkten von $(\Sigma\Sigma')$ eindeutig eine Gerade zugeordnet werden kann. Die Tangentialebenen des Punktes $\mathfrak{A}'$, der ja auf allen Flächen des Büschels liegt, erfüllen einen Ebenenbüschel, dessen Axe die in $\mathfrak{A}'$ berührende Tangente der R_1^4 ist. *Die Punkte* $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ *stellen sich als einfache Hauptpunkte heraus;* ihre entsprechenden Geraden erfüllen die Büschel um die Spuren ihrer Tangenten.

Einer Geraden von Σ *entsprechen dann fünf Punkte in* Σ', nämlich die fünf Doppelpunkte der Kurve achter Ordnung, in welche sie durch die $\mathfrak{T}_{2,2}$ übergeführt wird. Die fünf Punkte, welchen die Gerade $(\Sigma\Sigma')$ entspricht, sind die drei Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks $(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}')$ und die Doppelpunkte der auf dieser Geraden durch den F^2-Büschel hervorgerufenen Involution.

Der Grad dieser fünfeindeutigen reziproken Verwandtschaft ist die Klasse des Torsus, den man erhält, wenn man in den Punkten einer Geraden g die Tangentialebenen an die hindurchgehenden Flächen des Büschels konstruiert. Ist $\mathfrak{X}$ ein beliebiger Punkt des Raumes, so liegen auf jedem Strahl des Büschels $(\mathfrak{X}, g)$ zwei Punkte, nämlich die Doppelpunkte der durch den F^2-Büschel eingeschnittenen Involution, welche ihre Tangentialebenen durch $\mathfrak{X}$ senden; auf einem Strahl des Büschels ist $\mathfrak{X}$ selbst einer der beiden Punkte. Also ist ihr Ort eine Kurve dritter Ordnung. Ihre drei Schnitte mit g liefern solche Punkte wie wir sie suchen. *Die Verwandtschaft ist also dritten Grades.* Einer Geraden in Σ' entspricht eine Kurve dritter Klasse mit einer Doppeltangente. Diese ist notwendig wegen der eindeutigen Beziehung der Punkte von Σ' zu den Geraden von Σ, lässt sich aber auch leicht nachweisen. Jeder Torsus dritter Klasse kann ja aufgefasst werden als die Gesamtheit der Schmiegungsebenen einer kubischen Raumkurve; die Kongruenz der zu-

[1]) Die Nullverwandtschaft zwischen Punkt und Tangentialebene wird bei Sturm, Geom. Verw. IV, No. 982 behandelt.

gehörigen Schmiegungsaxen ist erster Klasse. Die in der Ebene Σ gelegene Schmiegungsaxe liefert die Doppeltangente. Die Kurven dritter Klasse, welche den Geraden von Σ' entsprechen, sind vierter Ordnung — das ist der Rang der kubischen Raumkurve — und besitzen drei Rückkehrpunkte, die Schnitte mit der Rückkehrkurve dritter Ordnung des Torsus.

Einem Strahlenbüschel der Ebene Σ entspricht eine doppelpunktslose Kurve dritter Ordnung, welche durch $\mathfrak{A}', .. \mathfrak{D}'$ geht. Die fünf übrigen Schnitte zweier solcher Kurven kommen durch den gemeinsamen Strahl der beiden Büschel, aus denen sie entstehen, zustande.

Den Kegelschnitten $\bar{\mathfrak{K}}'$ entsprechen die als Klassenkurven aufzufassenden $\bar{\mathfrak{K}}$, den übrigen Kegelschnitten des Büschels $(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}')$ wieder solche, die wir bereits kennen[1]) (S. 72).

Die den beiden Geraden l' und l'_1 entsprechenden C schneiden sich in 64 Punkten; davon repräsentieren die vier dreifachen Punkte 36, die einfachen weitere sechs, zwei andere entsprechen dem Schnittpunkte (l', l'_1). Die übrigen 20 lehren, dass *die verbundene zweizweideutige involutorische Verwandtschaft $\mathfrak{T}'_2$ vom Grade 20 ist.* Beweist man diese Gradzahl dadurch, dass man die der Geraden l' entsprechende Kurve C nach Σ' zurücktransformiert, wobei sich von der entstehenden Kurve 64. Ordnung die Hauptkurven dritter Ordnung von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ je dreimal, die Hauptgeraden von $A, .. \bar{C}$ je einmal und die Gerade l' zweimal ablösen, so erkennt man gleichzeitig, dass *die sechs Punkte* $A, .. C$ *einfach auf der verbundenen Kurve* $\mathfrak{C}$ *der* l' *liegen*; sie entsprechen den einfachen Hauptpunkten der $\mathfrak{T}_{2,2}$ neben den sich absondernden Hauptgeraden.

Um die Vielfachheit des Punktes $\mathfrak{A}'$ für die verbundene Verwandtschaft zu erkennen, lege man durch ihn eine Gerade l'. Von der ihr entsprechenden C löst sich die Hauptkurve

[1]) Von den zunächst entstehenden Kurven 6 Klasse lösen sich drei vier Strahlenbüschel um $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ab.

des $\mathfrak{A}'$ ab, sodass nur eine Kurve fünfter Ordnung als der l' entsprechend zurückbleibt, welche noch doppelt durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ und einfach durch C, B, A hindurchgeht. Sie begegnet der C, welche der l' entspricht, ausser in Hauptpunkten noch $5 \cdot 8 - 4 \cdot 3 \cdot 2 - 3 = 13$ mal; zwei von diesen Punkten entsprechen dem (l', l'). Die elf übrigen haben einen entsprechenden auf l', den anderen auf der verbundenen Kurve 20. Ordnung; aber ebenso liegt stets einer der beiden entsprechenden auf der Geraden l'. Sie sind also die Schnitte dieser Geraden mit der verbundenen Kurve der l'. Daraus folgt, dass $\mathfrak{A}'$ — *und ebenso* $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ — *neunfache Hauptpunkte der Verwandtschaft* $\mathfrak{T}'_2$ *sind.* Diese Vielfachheit der Punkte $\mathfrak{A}', .. \mathfrak{D}'$ für die verbundene Verwandtschaft lässt sich einfacher folgendermassen erkennen: Die Kurven C haben auf jedem Kegelschnitt des Büschels $(\mathfrak{ABCD})$ ausserhalb der Hauptpunkte vier Schnitte: jedem von ihnen entspricht ein Punkt auf l' und einer auf der verbundenen Kurve dieser Geraden, beide auf dem zugeordneten Kegelschnitt des Büschels $(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}')$. Ausserhalb der Grundpunkte besitzen also die Kurven $\mathfrak{C}'$ vier Punkte auf jedem Kegelschnitt des genannten Büschels. Die 36 noch fehlenden Schnitte müssen sich gleichmässig auf die Fundamentalpunkte des Büschels verteilen.

Auf der Geraden $\mathfrak{AD}A'$ liegen ausser den Hauptpunkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ noch zwei Schnitte mit der C, welche der Geraden l' entspricht. Das hat zur Folge, dass *die sechs Punkte* $A', .. C'$ *doppelte Hauptpunkte für die Verwandtschaft* $\mathfrak{T}'_2$ *sind.*

Da jeder Punkt von $(\Sigma\Sigma')$ sich mit seinen beiden entsprechenden vereinigt, so fallen auch seine zwei verbundenen Punkte mit ihm zusammen. *Daher bleibt* $(l', (\Sigma\Sigma'))$ *Doppelpunkt auch für die verbundene Kurve* $\mathfrak{C}'$.

Auf jeder der sechs Doppelsekanten in Σ' liegen zwei neunfache und ein einfacher Hauptpunkt der Verwandtschaft $\mathfrak{T}'_2$. Auf der Geraden $\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'A$ z. B. kommt der zwanzigste Punkt dadurch zustande, dass es auf der entsprechenden Kurve der l' einen Punkt gibt, von dessen Doppelsekanten

eine die l', die andere die $\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'A$ trifft. Alle Doppelsekanten, welche der letzteren begegnen, bilden eine Regelfläche achter Ordnung, von der sich jedoch die beiden Kegel dritter Ordnung, welche die R_1^4 aus $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{D}'$ projizieren, absondern, sodass eine Regelschar zurückbleibt. Zu ihr gehört auch die Gerade $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ und die zweite durch A gehende Doppelsekante der Raumkurve. Ihre Spur in Σ ist ein Kegelschnitt, auf dem die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ — durch jeden Punkt der R_1^4 gibt es ja eine die $\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'$ treffende Doppelsekante — und A und $\bar{A}$ liegen. Auf ihm muss sich auch der gesuchte Punkt befinden. Dieser Kegelschnitt hat mit der der Geraden l' entsprechenden C zwei nicht in Hauptpunkte fallende Schnitte; einer von ihnen führt zu dem Treffpunkt $(l', \mathfrak{A}'\mathfrak{D}')$, der andere ist der gesuchte Punkt.

Von den zwanzig *Schnittpunkten der Geraden* l' *mit ihrer verbundenen Kurve* besitzen wir erst zwei, den Doppelpunkt (l', Σ). *Zehn weitere Schnitte sind jene fünf Punktepaare, welche zu den Doppelpunkten der der Geraden* l' *entsprechenden* C *führen.* Die acht noch fehlenden sind die Schnittpunkte $(l', \mathfrak{K}')$. Ihnen entsprechen in Σ je zwei unendlich nahe Punkte auf dem zugeordneten $\mathfrak{K}$: sucht man zu diesen die entsprechenden Elemente in Σ', so erhält man den Ausgangspunkt zweimal zurück und dazu seine beiden Nachbarpunkte. *Die der Geraden* l' *verbundene Kurve 20. Ordnung tangiert die von den vier Kegeln des Büschels eingeschnittenen Kurven je in den beiden Punkten, in den sie von der* l' *getroffen werden.*

Die acht von (l', Σ) ausgehenden Doppeltangenten der C führen zu nichts Besonderem.

Die Basierung der $\mathfrak{T}_{2,2}$ auf die Projektivität der beiden Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ und $(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}')$ ermöglicht es, die $\mathfrak{T}'_2$ in ∞^1 einstufige involutorische Korrespondenzen [2] auf den Kegelschnitten des Büschels $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}$ aufzulösen[1]).

[1]) Neben den nachgewiesenen vielfachen Punkten erhält die verbundene Kurve 20. Ordnung der l' noch eine Anzahl von Doppel-

Dem Punkte $\mathfrak{A}'$ *ist eine Kurve neunter Ordnung verbunden*; man erhält sie, wenn man seine Hauptkurve dritter Ordnung durch die $\mathfrak{T}_{2,2}$ transformiert. Sie geht einfach durch die Punkte A, $\bar{B}$, $\bar{C}$, welche in der $\mathfrak{T}_{2,2}$ sich selbst entsprechen, und ebenso durch die sechs Punkte A′,.. C′. Denn auf jeder Doppelsekante der Ebene Σ liegt ein Punkt der Hauptkurve des $\mathfrak{A}'$, der kein Hauptpunkt ist.

Nun sei eine Gerade a′ durch den Punkt $\mathfrak{A}'$ gelegt. Ihr entspricht in Σ eine Kurve fünfter Ordnung C^5, welche doppelt durch $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C},\mathfrak{D}$ und einfach durch $\bar{A}$, B, C geht; dem Punkte $\mathfrak{A}'$ der Geraden a′ sind zwei Punkte dieser Kurve, die natürlich auf der Hauptkurve des $\mathfrak{A}'$ liegen, als entsprechend zuzurechnen. Sie schneidet die Hauptkurve dritter Ordnung des $\mathfrak{A}'$ in 15 Punkten, von denen acht, nämlich die doppelt zu rechnenden $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C},\mathfrak{D}$, in Hauptpunkte fallen; die sieben übrigen haben als den einen entsprechenden stets den Punkt $\mathfrak{A}'$, während der andere auf der verbundenen Kurve dieses Punktes liegt; aber andererseits ist der eine entsprechende stets auf a′ gelegen, davon zweimal in $\mathfrak{A}'$ selbst. Also schneidet die Gerade a′ die verbundene Kurve des $\mathfrak{A}'$ fünfmal ausserhalb dieses Punktes, und daraus folgt, dass $\mathfrak{A}'$ selbst in der Vielfachheit vier auf seiner verbundenen Kurve liegt.

Einer Geraden b′ durch $\mathfrak{B}'$ entspricht in Σ eine Kurve fünfter Ordnung, welche doppelt durch $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C},\mathfrak{D}$ und einfach durch A, $\bar{B}$, C geht; sie schneidet die Hauptkurve des $\mathfrak{A}'$ in fünf nicht in Hauptelemente fallenden Punkten. Von ihren entsprechenden Punkten ist einer der $\mathfrak{A}'$, während der andere auf der verbundenen Kurve dieses Punktes liegt;

punkten. Die vier zweiten Doppelsekanten, die von den vier ausserhalb der Büschelgrundpunkte gelegenen Treffpunkten eines Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ mit der C ausgehen und zu Punkten der der 1′ verbundenen Kurve führen, gehören paarweise den beiden von der durch $\mathfrak{K}$ gehenden Büschelfläche getragenen Regelscharen an; jede schneidet daher zwei andere. Also liegen auf jeder Büschelfläche vier derartige Schnittpunkte. Die Treffpunkte der durch sie erzeugten Raumkurve mit der Ebene Σ' werden Doppelpunkte der verbundenen Kurve.

andererseits liegt dieser stets auf b′, und daraus folgt, dass die verbundene Kurve des $\mathfrak{A}'$ die Gerade b′ fünfmal ausserhalb des Punktes $\mathfrak{B}'$ schneidet, dass also $\mathfrak{B}'$ vierfach auf dieser Kurve liegt.

Die den Punkten $\mathfrak{A}' \ldots \mathfrak{D}'$ *verbundenen Kurven gehen durch einen jeden dieser Punkte viermal, ferner einfach durch die sechs Punkte* $A', \ldots \overline{C}'$ *und durch drei der Punkte* $A, \ldots C$.

Die Punkte $A, \ldots C$ *sind einmal sich selbst verbunden; ihr zweiter verbundener Punkt wird auf den Geraden* $\mathfrak{A}'\mathfrak{D}', \ldots \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ *unbestimmt.*

Die beiden Punkte A' *und* $\overline{A}'$ *haben dieselbe verbundene Kurve;* es ist jener Kegelschnitt des Büschels $(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}')$, welcher in der Projektivität dem $(\mathfrak{A}\mathfrak{D}, \mathfrak{B}\mathfrak{C})$ entspricht. Aehnliches gilt von den Punkten B' und $\overline{B}'$, C' und $\overline{C}'$. *Daneben sind auch diese Punkte sich selbst verbunden.*

2.

Nun sei die Raumkurve vierter Ordnung erster Art durch eine solche zweiter Art ersetzt. Die Vieldeutigkeit der entstehenden Verwandtschaft ist durch die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte der Kurve gegeben. Cremona berechnet sie[1]) aus Ordnung und Klasse des Projektionskegels mit Hilfe der Plückerschen Formeln zu drei. *Durch Zuordnung der Spuren der Doppelsekanten einer Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art wird also in den Punktfeldern zweier Ebenen* Σ *und* Σ' *eine dreidreideutige Verwandtschaft hervorgerufen;* sie wird fortan $\mathfrak{T}_{3,3}$ genannt werden.

Eine beliebige Gerade g scheidet aus der Kongruenz der Doppelsekanten der R_{11}^4 eine Regelfläche $\mathfrak{R}$ aus. Durch einen jeden Punkt der g gehen drei Erzeugende, also wird sie dreifache Leitgerade. In jeder Ebene ihres Büschels liegen ferner vier Punkte und damit sechs Doppelsekanten der Raumkurve, und diese bilden den vollständigen Schnitt der Transversalebene mit der Regelfläche. Deren Ordnung ist

[1]) Annali di Matematica (Ser. I) IV S. 71. § 16.

demnach neun. Auf ihr ist die R_{II}^4 dreifach, denn durch einen jeden ihrer Punkte gehen drei die g treffende Doppelsekanten. Daraus lässt sich folgern, dass *die* $\mathfrak{T}_{3,3}$ *eine Verwandtschaft neunten Grades ist.* Denn legt man die Gerade g als l bezw. l′ in die eine Ebene, so entspricht ihr die Spur der durch sie bestimmten Regelfläche $\mathfrak{R}$ in der anderen, also eine Kurve neunter Ordnung C. Wir erkennen ferner, dass *die in* Σ *gelegenen Kurven* C *sämtlich dreimal durch die Punkte* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ *gehen.*

Die Hauptkurven dieser Punkte sind die Spuren ihrer Projektionskegel in Σ', also Kurven dritter Ordnung, welche einfach durch $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ und je durch drei der Punkte A′.. $\overline{C}'$ hindurchgehen und einen Doppelpunkt besitzen; durch jeden Punkt der R_{II}^4 lässt sich ja eine Gerade legen, welche ihr noch zweimal begegnet.

Durch einen jeden der sechs Punkte A, . . $\overline{C}$ gibt es drei Doppelsekanten der R_{II}^4; eine davon fällt in die Ebene Σ', die beiden anderen haben beliebige Lage. *Also sind diese sechs Punkte doppelt sich selbst entsprechend, während der dritte entsprechende Punkt auf einer der Geraden* $\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'$,. . $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ *unbestimmt geworden ist. Es zeigt sich, dass diese Punkte* A, . . $\overline{C}$ *einfach auf den Kurven* C *liegen.*

Ein jeder Punkt der Geraden ($\Sigma\Sigma'$) bestimmt drei Doppelsekanten, im allgemeinen in beliebiger Lage; er vereinigt sich daher mit seinen drei entsprechenden Punkten. Dieselbe Eigenschaft weisen die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, die Spuren des Hyperboloides H in den beiden Ebenen, auf. Die durch einen solchen Punkt gehenden Doppelsekanten vereinigen sich zu einer dreifachen Sekante, welche Erzeugende von H ist. Jedem Punkt von $\mathfrak{K}'$ entspricht in der $\mathfrak{T}_{3,3}$ ein solcher von $\mathfrak{K}$ dreifach. Da eine jede Gerade l′ den $\mathfrak{K}'$ zweimal und die ($\Sigma\Sigma'$) einmal trifft, so *erhalten die Kurven* C *drei dreifache Punkte, einen auf* ($\Sigma\Sigma'$), *die anderen beiden auf* $\mathfrak{K}$.

Was die Realität der drei von einem Punkte des Raumes ausgehenden Doppelsekanten der R_{II}^4 anlangt, so sind zwe

Fälle möglich: entweder sind sie sämtlich reell oder nur eine ist es, während die beiden anderen konjugiert imaginär werden. Der Uebergang zwischen diesen beiden Arten von Punkten wird, da ja jede Veränderung sich kontinuierlich vollzieht, so eintreten, dass von den drei Doppelsekanten zwei unendlich nahe werden. Das ist der Fall auf jener Fläche, welche von dem Torsus der Doppeltangentialebenen der R_{II}^4 umhüllt wird. Projiziert man die Raumkurve aus einem beliebigen Punkt einer Ebene desselben, so wird sie Doppeltangentialebene des entstehenden Kegels. Die beiden Kanten, längs deren sie berührt, sind im allgemeinen endlich verschieden; sie werden jedoch unendlich nahe, wenn der Projektionspunkt auf eine der beiden aufeinander folgenden Erzeugenden der Regelfläche, die in der betrachteten Ebene liegen, fällt. Man erkennt, dass der Strahl, welcher die beiden Berührungspunkte einer Doppeltangentialebene verbindet, mit zwei Doppelsekanten äquivalent zu rechnen ist. Cremona beweist[1]), dass der Torsus der Doppeltangentialebene der R_{II}^4 vierter Klasse zweiter Art, d. h. sechsten Ranges ist. Die sechs Schnitte S' seiner abwickelbaren Regelfläche mit der Geraden l' zeigen, dass *die entsprechende Kurve* C *die Spur dieser Regelfläche in der Ebene* Σ *sechsmal berührt*; denn jeder Punkt S' bildet den Uebergang von solchen Punkten, deren entsprechende sämtlich reell sind, zu denen, die nur einen reellen entsprechenden haben, und besitzt auf der Spur der genannten Regelfläche in Σ zwei unendlich nahe entsprechende Punkte.

Neben den bereits festgestellten vielfachen Punkten erhalten die Kurven C noch eine Reihe von Doppelpunkten; diese kommen dadurch zustande, dass sich zwei von Punkten der l' ausgehende Doppelsekanten auf der Ebene Σ schneiden. Ihre Zahl stimmt also überein mit der Ordnung der Raumkurve, die auf der durch die l' ausgeschiedenen Regelfläche von Doppelsekanten $\mathfrak{R}$ durch die Folge dieser Schnittpunkte entsteht. In jeder Ebene durch die l' liegen drei derartige

[1]) a. a. O. § 20.

Punkte, die Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks, dessen Ecken die Schnitte der Transversalebene mit der R^4_{II} sind. Um festzustellen, wie oft ein derartiger Diagonalpunkt auf die l' selbst fällt, legen wir folgende Korrespondenz im Ebenenbüschel um die l' fest: In jeder Ebene ξ desselben liegen sechs Doppelsekanten der Raumkurve; durch ihre Schnitte mit der l' sind sechs weitere Paare von Doppelsekanten bestimmt; die Ebenen, welche sie mit der l' verbinden, werden der ξ zugeordnet. Es entsteht also eine involutorische Korrespondenz [12]. Zu einfachen Koinzidenzen wird man durch die sechs Schnittpunkte der l' mit der abwickelbaren Regelfläche des Torsus der Doppeltangentialebenen geführt; durch einen solchen Punkt gehen ja zwei unendlich benachbarte Doppelsekanten, welche zwei ebensolche Ebenen einander zuordnen. Die übrigen Koinzidenzen kommen durch solche Punkte zustande, von deren drei Doppelsekanten zwei in einer Ebene durch l' liegen. Da derartige Ebenen als doppelte Koinzidenzen zu zählen sind — von ihren zwölf korrespondierenden vereinigen sich zwei in ihr —, so kommt es neunmal vor, dass ein derartiger Diagonalpunkt auf die Gerade l' fällt. Es entsteht also durch die Folge dieser Punkte eine Raumkurve 12. Ordnung, welche zu zwölf Doppelpunkten der Kurve C führt. In diesen sind jedoch die beiden auf $\mathfrak{K}$ liegenden dreifachen Punkte der Kurve einbegriffen; sie kommen ja zustande durch jene beiden Ebenen, welche die zwei die l' treffenden dreifachen Sekanten der R^4_{II} aufnehmen[1]). *Die Kurven* C *erhalten demnach noch sechs veränderliche Doppelpunkte*[2]).

[1]) Auf diese Weise erspart man sich die Mühe, die beiden Ebenen als sechsfache Koinzidenzen nachzuweisen.

[2]) Cremona berücksichtigt a. a. O. § 9 nicht, dass die Doppelkurve der durch die l' ausgeschiedenen Regelfläche von Doppelsekanten diese Gerade schneidet und erhält daher nur die Ordnung drei.

Wesentlich leichter führt eine Korrespondenz in der Punktreihe der Geraden l' dazu, zu erkennen, wie oft die Doppelkurve der durch diese Gerade bestimmten Regelfläche der Doppelsekanten die Leitlinie l' schneidet. Ein Punkt $\mathfrak{X}$ dieser Geraden bestimmt drei Doppelsekanten der Raumkurve und damit drei durch l' gehende Ebenen. In dem vollständigen Viereck der in einer solchen Ebene gelegenen Doppelsekanten ist die aus $\mathfrak{X}$ kommende eine Seite; die Spur ihrer Gegenseite in l' wird dem $\mathfrak{X}$ als entsprechend zugeordnet. Das Ergebnis ist eine involutorische Korrespondenz [3]. Hier wirken weder die Schnitte mit der abwickelbaren Regelfläche der Doppeltangentialebenen noch mit dem Hyperboloid H störend. Allein diejenigen Punkte, von deren drei Doppelsekanten zwei in einer Ebene durch l' liegen, werden Koinzidenzen, und zwar doppelte. Wiederum gewinnen wir das Ergebnis, dass die Doppelkurve sechster Ordnung ist[1].

Die nachgewiesenen vielfachen Punkte der Kurven C bewirken das Geschlecht 1 und die Klasse 18; von einem dreifachen Punkte müssen also noch zwölf anderwärts berührende Tangenten ausgehen. Sie lassen sich beim Punkte (l', Σ) sehr leicht erkennen. Wir erzeugen die der l' entsprechende Kurve, indem wir eine Ebene um diese Gerade drehen, und dabei jedesmal die sechs mit ihr inzidenten Doppelsekanten konstruieren. Da die R_{II}^4 den Rang 6 besitzt, so muss es sechsmal vorkommen, dass eine solche Ebene eine Tangente der Raumkurve aufnimmt. In diesem Falle sind von ihren vier Schnittpunkten zwei unendlich nahe, und sie ergeben, aus den beiden anderen projiziert, je zwei Paare konsekutiver Punkte auf der Spurgeraden dieser Ebene. *Die Kurven C entsenden also aus ihrem dreifachen Punkt auf der Geraden* $(\Sigma\Sigma')$ *sechs Doppeltangenten.*

[1]) Die Berührung der abwickelbaren Regelfläche der Doppeltangentialebenen durch die Kurven, welche den Geraden der einen Ebene entsprechen, sowie die Doppelpunkte dieser Kurven haben wir im vorigen Abschnitt auf andere Art bewiesen; die jetzige Erörterung verdient vor der dortigen den Vorzug, weil sie eine Uebertragung auf Raumkurven höherer Ordnung gestattet.

Nun können wir noch jene *Verwandtschaft* betrachten, *welche einem Punkte von Σ' die drei Verbindungslinien seiner entsprechenden Punkte zuordnet. In dieser Richtung ist die Verwandtschaft dreideutig.* Um auch für die Punkte von $(\Sigma\Sigma')$ die Möglichkeit einer eindeutigen Zuordnung von Geraden in endlicher Zahl zu erreichen, definieren wir die Verwandtschaft genauer dahin, dass wir einem Punkte von Σ' die Spuren der Ebenen des Dreikants, welches die mit ihm inzidenten Doppelsekanten bilden, als korrespondierend zuordnen. Schwierigkeiten machen ferner die Punkte des $\mathfrak{K}'$. Die drei einem solchen zugeordneten Geraden gehen natürlich durch den entsprechenden Punkt von $\mathfrak{K}$. Durchläuft man mit einem beweglichen Punkte eine beliebige Gerade von Σ', so geht das durch ihn bestimmte Dreikant beim Passieren des $\mathfrak{K}'$ in das System jener drei Ebenen durch die dreifache Sekante über, welche die Tangenten in den Schnittpunkten mit der R^4_{II} aufnehmen. Es sei P' ein Punkt von l' unendlich nahe einem Schnitt mit $\mathfrak{K}'$. Dann treffen die drei verschiedenen, aber unendlich nahen Doppelsekanten die Kurve in S, T; S′, U′; T″, U″, wo S, S′; T, T″; U′, U″ unendlich nahe sind. Also gehen die drei verbindenden Ebenen von P' nach SS′, TT″, U′U″, und diese drei Geraden rücken, wenn P' auf $\mathfrak{K}'$ kommt, in die Tangenten der R^4_{II} in den Schnittpunkten mit der dreifachen Sekante durch P'. Die vier Punkte $\mathfrak{A}'$,..$\mathfrak{D}'$ scheinen von den übrigen Elementen des $\mathfrak{K}'$ nicht unterschiedlich behandelt werden zu dürfen, anderen Falles könnte jede Gerade von Σ diesen Punkten als korrespondierend zugeordnet werden.

Einer Geraden von Σ sind dann sechs Punkte in Σ' zugeordnet, die Doppelpunkte der Kurve C', in die sie durch Anwendung der $\mathfrak{T}_{3,3}$ transformiert wird. Die der Geraden $(\Sigma\Sigma')$ entsprechenden Punkte sind die Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks $(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}')$ und die Treffpunkte der $(\Sigma\Sigma')$ mit der Doppelkurve, welche auf der durch sie ausgeschiedenen Regelfläche von Doppelsekanten verläuft.

Zur Abzählung des Grades dieser sechsdreideutigen reziproken Verwandtschaft benützen wir die bereits im vorigen

Abschnitt angegebene Methode. Sie ist mit der bei Nullverwandtschaften[1]) — eine solche liegt ja hier vor — allgemein üblichen identisch. Der Grad der Verwandtschaft ist die Klasse des Torsus von Ebenen, welche den Punkten einer Geraden g entsprechen, d. h. die Anzahl der Ebenen durch einen beliebigen Punkt Q des Raumes, die zu Punkten von g gehören, also die a. a. O. n genannte Zahl. Wir konstruieren die Strahlen q des Büschels (Q, g) und zählen ab, wie oft ein Punkt eines solchen eine seiner entsprechenden Ebenen durch Q sendet, bestimmen also die Zahl γ. Sie ist 3; die drei Punkte sind die Schnitte von q mit der Doppelkurve der durch sie ausgeschiedenen Regelfläche $\mathfrak{R}$. Auf drei Strahlen q — Korrespondenzzahl α — ist Q selbst einer dieser Punkte. Ihr Ort ist demnach eine Kurve 6. Ordnung. Ihre sechs Schnitte mit g liefern die gesuchte Zahl $n = \alpha + \gamma = 6$. *Die Verwandtschaft ist also sechsten Grades.*

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der mit der $\mathfrak{T}_{3,3}$ verbundenen sechssechsdeutigen involutorischen Verwandtschaft $\mathfrak{T}'_6$. Zwei Kurven C haben 81 Schnittpunkte; von ihnen werden durch die vier dreifachen Hauptpunkte 36 repräsentiert, sechs weitere liefern die einfachen Hauptpunkte. Von den übrigen 39 entsprechen drei dem Schnittpunkt der beiden Geraden, aus denen die Kurven durch Anwendung der $\mathfrak{T}_{3,3}$ hervorgehen. Die 36 anderen lehren, dass *die Verwandtschaft $\mathfrak{T}'_6$ den Grad 36 besitzt.*

Die Punkte $\mathfrak{A}', \ldots \mathfrak{D}'$ liegen auf den verbundenen Kurven in der Vielfachheit zwölf. Einer durch $\mathfrak{A}'$ gelegten Geraden a′ entspricht in der $\mathfrak{T}_{3,3}$ eine Kurve sechster Ordnung, welche noch doppelt durch $\mathfrak{A}, \ldots \mathfrak{D}$ und einfach durch C, B, A hindurchgeht. Mit der der l′ entsprechenden C hat sie 27 nicht in Hauptelemente fallende Schnitte, von denen drei dem Punkte (l′, a′) entsprechen. Die übrigen 24 haben einen entsprechenden auf l′, die beiden anderen auf der verbundenen Kurve dieser Geraden; aber andererseits liegt einer

[1]) Sturm, Geom. Verw. IV, No. 978

der drei entsprechenden Punkte stets auf der Geraden a′, und zwar ausserhalb ihres Schnittes mit der l′. Diese 24 Punkte sind also die ausserhalb von $\mathfrak{A}'$ gelegenen Treffpunkte der a′ mit der verbundenen Kurve der l′. Die zwölf übrigen müssen sich in $\mathfrak{A}'$ vereinigen.

Die Punkte A,.. $\overline{\text{C}}$ *sind doppelte Hauptpunkte für die verbundene Verwandtschaft*; sie entsprechen den einfachen Hauptpunkten der $\mathfrak{T}_{3,3}$ neben den sich ablösenden Hauptgeraden doppelt. *Ferner liegen die Punkte* A′,.. $\overline{\text{C}}'$ *dreifach auf den verbundenen Kurven*, weil die C auf einer jeden der sechs Doppelsekanten der R^4_{II}, welche in der Ebene Σ liegen, ausser Hauptpunkten noch drei Schnitte besitzen.

Die Punkte der Geraden ($\Sigma\Sigma'$) und des Kegelschnitts K′ vereinigen sich mit ihren sechs verbundenen. *Also erhält die der* l′ *verbundene Kurve einen sechsfachen Punkt in* (l′, Σ) — damit haben wir alle 36 Schnittpunkte auf der Geraden ($\Sigma\Sigma'$) — *und zwei solche in den Treffpunkten* (l′, $\mathfrak{K}'$). *Zu sechs Punktepaaren auf* l′ *und je einem Doppelpunkt führen die sechs Doppelpunkte der Kurve* C, *welche der* l′ *in der* $\mathfrak{T}_{3,3}$ *entspricht*, wie eine einfache Abzählung zeigt. Die noch fehlenden sechs Punkte auf der Geraden l′ kommen dadurch zustande, dass *die verbundene Kurve die Spur der abwickelbaren Regelfläche sechster Ordnung der Doppeltangentialebenen der* R^4_{II} *in ihren Schnitten mit der* l′ *tangiert.*

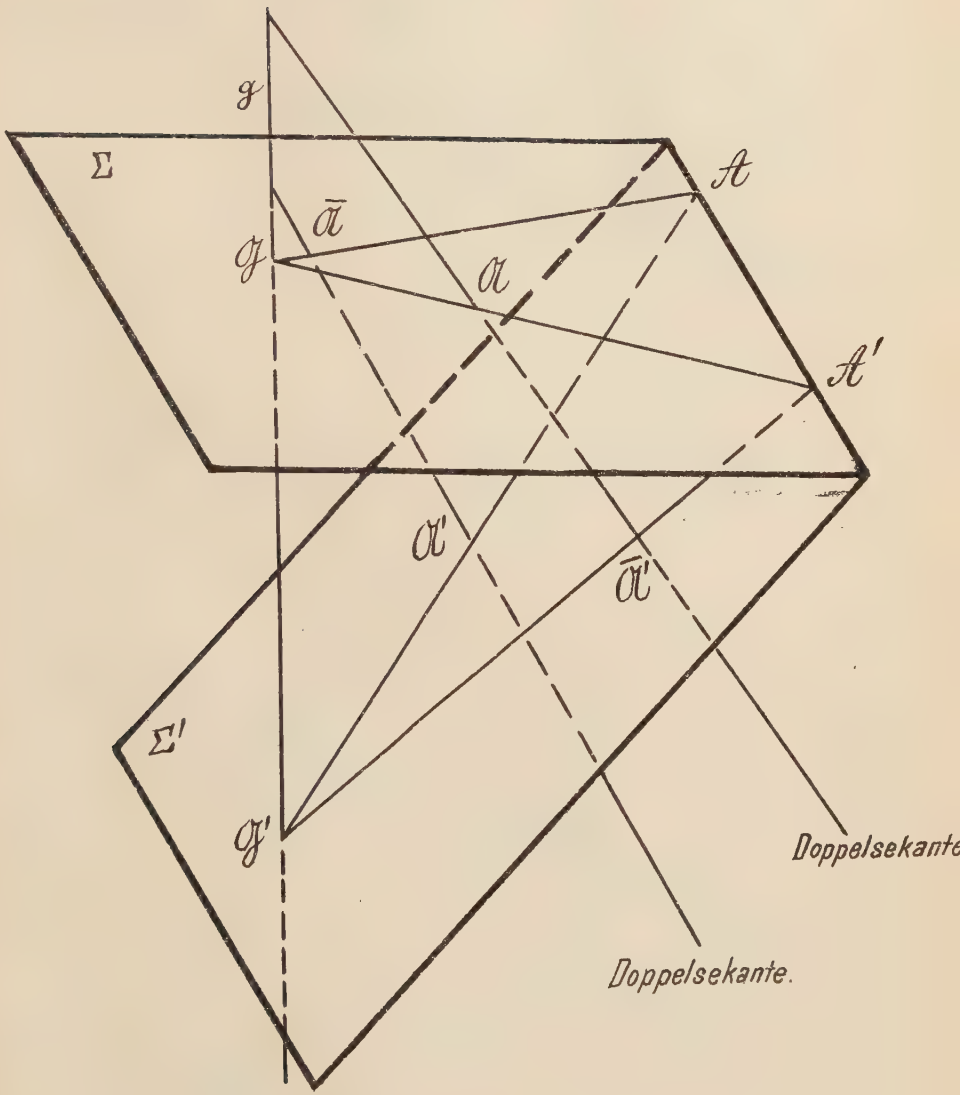
Dem Punkte $\mathfrak{A}'$ *ist eine Kurve 12. Ordnung verbunden.* Man erhält sie, wenn man seine Hauptkurve dritter Ordnung durch die $\mathfrak{T}_{3,3}$ transformiert. Bei dieser Operation erkennt man, dass $\overline{\text{C}}$, $\overline{\text{B}}$, A doppelt und A′,.. $\overline{\text{C}}'$ einfach auf ihr liegen. Einer Geraden a′ durch $\mathfrak{A}'$ entspricht in der $\mathfrak{T}_{3,3}$ eine Kurve sechster Ordnung, welche doppelt durch $\mathfrak{A}$,.. $\mathfrak{D}$ und einfach durch C, B, $\overline{\text{A}}$ geht. Drei ihrer Punkte entsprechen dem $\mathfrak{A}'$; sie liegen natürlich auf seiner Hauptkurve. Von ihnen und von Hauptpunkten abgesehen, schneidet diese Kurve die Hauptkurve des $\mathfrak{A}'$ siebenmal. Jeder dieser Treffpunkte hat einen entsprechenden in $\mathfrak{A}'$,

zwei auf der verbundenen Kurve dieses Punktes, aber ebenso liegt einer der drei entsprechenden Punkte stets auf a', und zwar ausserhalb von $\mathfrak{A}'$. Daraus folgt, dass die verbundene Kurve des $\mathfrak{A}'$ die Gerade a' ausserhalb dieses Punktes siebenmal schneidet, dass also der Punkt $\mathfrak{A}'$ in der Vielfachheit fünf auf seiner verbundenen Kurve liegt.

Eine Gerade b' durch $\mathfrak{B}'$ bildet sich ebenfalls in eine Kurve sechster Ordnung ab; sie geht doppelt je durch $\mathfrak{A}, .. \mathfrak{D}$, einfach durch A, $\overline{\text{B}}$, C. Ihre acht nicht in Hauptelemente fallenden Schnitte mit der Hauptkurve des $\mathfrak{A}'$ lehren, dass die verbundene Kurve dieses Punktes viermal durch $\mathfrak{B}'$ geht. Ebenso liegen auf ihr die Punkte $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{D}'$ vierfach.

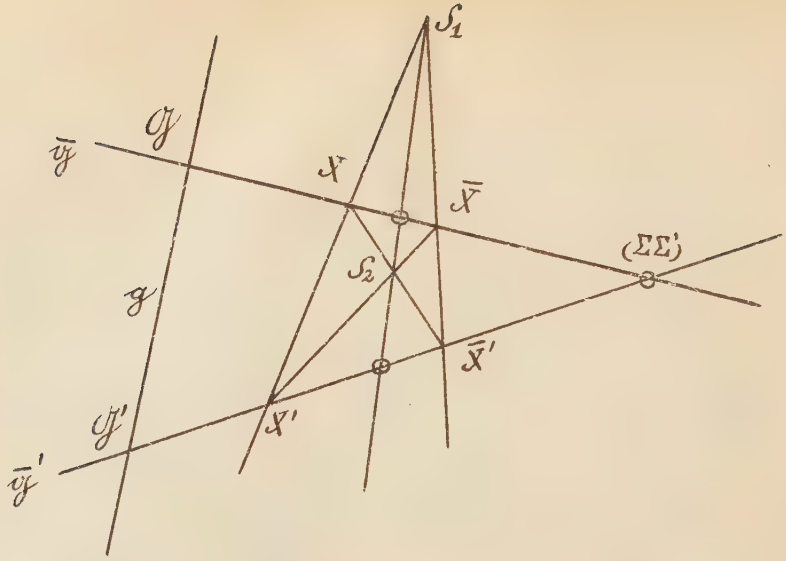
Von den sechs verbundenen Punkten des A *als Punkt von* Σ' *vereinigen sich vier mit ihm, während die beiden anderen auf der Geraden* $\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'$ *unbestimmt werden.*

Ebenso vereinigen sich mit A' *vier seiner verbundenen Punkte. Die beiden übrigen werden auf einer Kurve dritter Ordnung unbestimmt*, welche zweimal durch A', einmal durch $A', \mathfrak{A}', .. \mathfrak{D}'$ geht; sie ist die in Σ' gelegene Spur der Regelfläche dritter Ordnung, welche von den die $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ treffenden Doppelsekanten der R^4_{II} erfüllt wird.

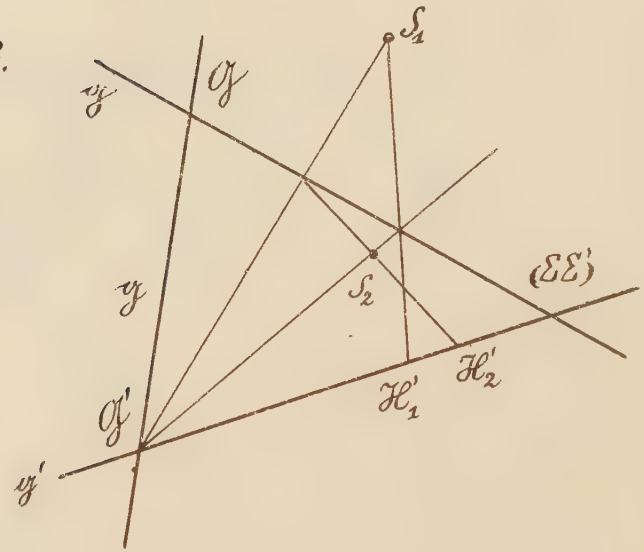


Punktierte Linien sind unsichtbar.

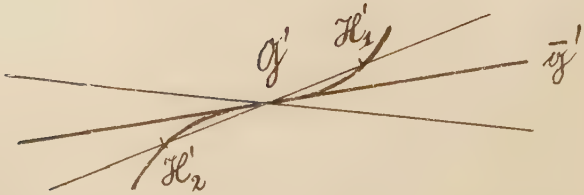
2.


$\mathcal{S}_1$
$\mathcal{Y}$
$\bar{y}$
X
$\bar{X}$
$(\Sigma\Sigma')$
$\mathcal{S}_2$
y
$\bar{X}'$
$\mathcal{Y}'$
X'
$\bar{y}'$

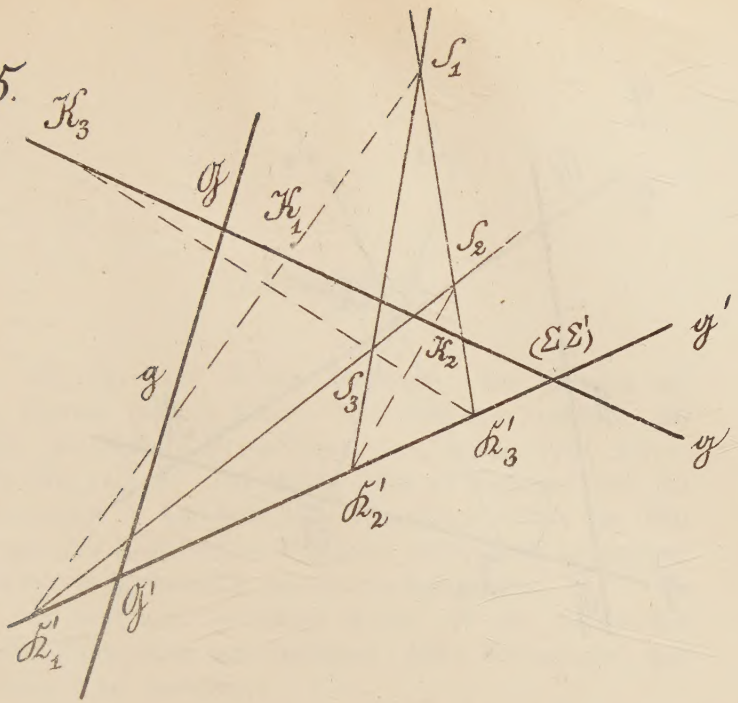
3.


$\mathcal{S}_1$
y
$\mathcal{Y}$
$(\Sigma\Sigma')$
$\mathcal{S}_2$
y
$\mathcal{H}_2'$
$\mathcal{H}_1'$
$\mathcal{Y}'$
y'

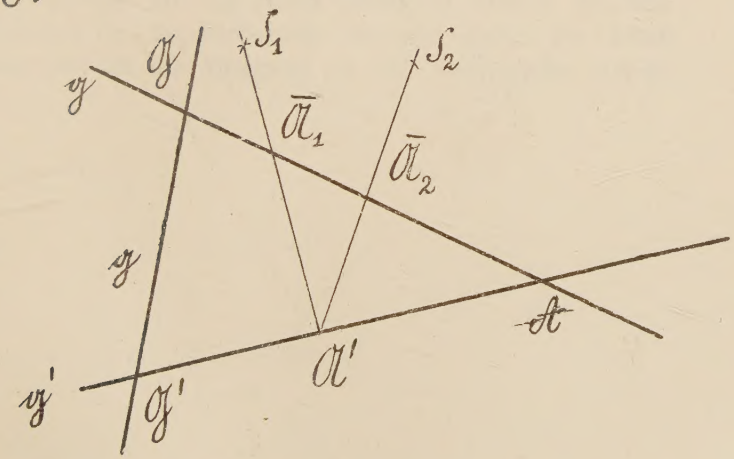
4.


$\mathcal{Y}'$
$\mathcal{H}_1'$
$\bar{y}'$
$\mathcal{H}_2'$

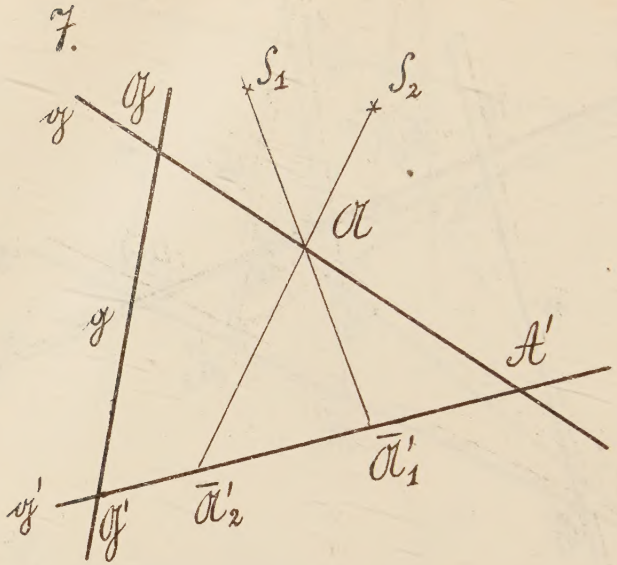
5.


S_1
K_3
$\mathcal{Y}$
K_1
S_2
K_2
$(\Sigma\Sigma')$
$\mathcal{Y}'$
g
S_3
K'_3
$\mathcal{Y}$
K'_2
$\mathcal{Y}'$
K'_1

6.


S_1
S_2
$\mathcal{Y}$
$\bar{A}_1$
$\bar{A}_2$
g
A
$\mathcal{Y}'$
A'
$\mathcal{Y}'$

7.



Lebenslauf.

Ich, Gerhard Broll, katholisch, bin geboren am 27. Februar 1888 in Domb, Kreis Kattowitz O./Schles. als Sohn des Rektors Franz Broll und seiner Frau Anna, geb. Morczinek. Von Ostern 1898 ab besuchte ich das Gymnasium zu Kattowitz, das ich Ostern 1907 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Hierauf studierte ich an hiesiger Universität Mathematik und Naturwissenschaften.

In dankbarer Gesinnung nenne ich die Namen der Herren Professoren und Dozenten, deren Vorlesungen und Uebungen ich besuchte:

Abegg (†), Baumgartner, Franz, Herz, Hönigswald, Kabitz, Kneser, Kühnemann, Ladenburg (†), Lummer, Pringsheim, Rosanes, Sackur, Schaefer, Sturm, Waetzmann.

Besonders bin ich Herrn Geheimrat Sturm zu Dank verpflichtet für die Förderung, die mir durch ihn zuteil wurde, und für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit.